پاسخنامه

ریاضی

حد وپیوستگی

www.mapedu.ir

کانون
فرهنگی
آموزش
قلم‌چی

www.mapedu.ir

۱ – گزینهٔ «۴» (فرشاد صدریانی)

می‌دانیم:

$$\lim_{x\to 3^-}\lfloor x\rfloor = 2$$

حاصل حد برابر است با:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{2\sqrt{(x-3)^2}}{(x-3)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{2|x-3|}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x-2)}=\frac{-2}{1}=-2$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۸ و ۳۶)

(ترکیبی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ و ۵۳)

---

۲ – گزینهٔ «۴» (سعید نوری‌آرا)

با بررسی هر گزینه داریم:

گزینهٔ «۱»:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=2$$

گزینهٔ «۲»:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to (-1)^+} f(x)=-1$$

گزینهٔ «۳»:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to (-\frac{1}{2})^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to (-\frac{1}{2})^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to -\frac{1}{2}} g(x)=0$$

گزینهٔ «۴»:

$$\lim_{x\to \frac{2}{3}^-} g(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to 3} f(x)=0$$

(در و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۰ و ۴۷)

---

۳ – گزینهٔ «۱» (سروش مولایی)

با بررسی صورت و کسر حد داده شده به‌صورت جداگانه داریم:

$$\lim_{x\to (-1)^-}\frac{f(x+1)}{f(2-x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)}{\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)}=\frac{\text{عددی مثبت}}{0^-}=-\infty$$

وقتی $x\to(-1)^-$، مقدار $2-x$ از مقادیر بیش‌تر از ۳ به ۳ نزدیک می‌شود. $2-x\to 3^+$. هم‌چنین با توجه به نمودار، در همسایگی راست $x=3$ $(x\to 3^+)$، مقادیر تابع از کم‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شوند.

(ترکیبی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۰ و ۴۷)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ و ۵۷)

---

۴ – گزینهٔ «۱» (بهرام علاج)

با ساده‌سازی شرط‌های داده شده، داریم:

$$|x-3|\le 1 \longrightarrow -1\le x-3\le 1 \longrightarrow \boxed{2\le x\le 4}$$

$$|x-3|>1 \longrightarrow x-3<-1 \text{ یا } x-3>1 \longrightarrow x<2 \text{ یا } x>4$$

نقاط مرزی تابع فوق اعداد ۲ و ۴ می‌باشد، پس کافیست حد تابع را در این نقاط بررسی کنیم:

$$x=2:\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=4a+2b-3,\quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=4a+b \Rightarrow \begin{cases}4a+2b-3=4a+b\\ \Rightarrow b=3\end{cases}$$

$$x=4:\ \lim_{x\to 4^+} f(x)=8a+b,\quad \lim_{x\to 4^-} f(x)=16a+2b-3 \Rightarrow \begin{cases}8a+b=16a+2b-3\\ \xrightarrow{b=3} a=\frac{-3}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{-\frac{3}{4}}=-4$$

(در و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۸ و ۴۴)

---

۵ – گزینهٔ «۴» (وحید رامین)

برای این‌که تابع f در $x=2$ دارای حد باشد، باید حد راست و چپ در این نقطه با هم برابر باشد:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=[2^+]a+[(-4)^-](2)=2a+(-5)(2)=2a-10$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=[2^-]a+[(-4)^+](2)=a+(-4)(2)=a-8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$$

حاصل عبارت مورد نظر برابر است با:

$$\Rightarrow 2a-10=a-8\Rightarrow a=2$$

$$\lim_{x\to 3^+}(2|x|+|-2x|x)=2[3^+]+[(-6)^-](3)=2(3)+(-7)(3)=-15$$

(در و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۰ و ۳۶)

---

۶ – گزینهٔ «۲» (سروش مولایی)

با توجه به جملات پرتوان در صورت و مخرج داریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2}+\sqrt[3]{-x^3}}{x+|2x|}=\lim_{x\to -\infty}\frac{|2x|-x}{x-2x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-3x}{-x}=3$$

(حد در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ و ۶۴)

---

۷ – گزینهٔ «۳» (سید بهزاد نظری)

برای این‌که تابع f در مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته باشد، باید:

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} f(x)=\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} f(x)=f(\frac{\pi}{2})$$

$$2+\sin\pi=a\cos\frac{\pi}{2}+b\Rightarrow b=2$$

و همچنین:

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} f(x)=\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} f(x)=f(\frac{\pi}{2})$$

$$a\cos\pi+b=\sin\pi+10\Rightarrow -a+b=10\xrightarrow{b=2}a=-8$$

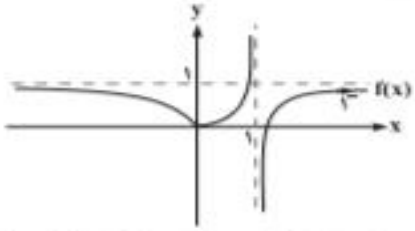
بنابراین با به‌دست آمدن $a=-8$ و $b=2$ داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{-8}{2}=-4$$

(مد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۲)

---

۸ – گزینهٔ «۳» (علی ساروی)



با توجه به نمودار تابع f، اگر $x\to+\infty$ آن‌گاه $f(x)\to 1^-$ و درنتیجه $\frac{1}{f(x)}\to 1^+$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$$

(مد و بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۴۳)

---

۹ – گزینهٔ «۳» (احسان کریمی)

باید مقادیر تقریبی sin و cos را در حوالی نقطه $\frac{3\pi}{2}$ محاسبه کنیم. می‌دانیم مقدار sin در نقطهٔ $\frac{3\pi}{2}$ برابر ۱- است و در حوالی آن (مقادیر بیشتر یا کمتر) مقدار آن بزرگ‌تر از ۱- است. پس حد تابع $[\frac{1}{\sin x}]$ در $\frac{3\pi}{2}$ برابر ۲- است.

مقدار cos در نقطهٔ $\frac{3\pi}{2}$، برابر صفر است و $(\frac{3\pi}{2})^+$ در ناحیهٔ ۴ و $(\frac{3\pi}{2})^-$ در ناحیهٔ سوم قرار می‌گیرد و بنابراین مقدار تقریبی cos را می‌توانیم کم‌تر و بیش‌تر از صفر در نظر بگیریم:

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^+}[\frac{1}{\sin x}]-[-\cos x]$$

$$=[(-1)^-]-[0^-]=-2-(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}[\frac{1}{\sin x}]-[-\cos x]=[\frac{1}{(-1)^+}]-[-(0^-)]$$

$$=[(-1)^-]-[0^+]=-2-0=-2$$

مجموع حدهای راست و چپ برابر با ۳- خواهد شد.

$$-1+(-2)=-3$$

(می‌توانید برای بهتر متوجه شدن حل مسئله به‌جای اعداد حدی از اعداد تقریبی استفاده کنید.)

(مد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۰ تا ۳۶)

---

۱۰ – گزینهٔ «۴» (سروش موئینی)

با توجه به شکل $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{ax^2+bx}=2$، پس داریم:

$$\xrightarrow{\text{در مزدوج ضرب کنیم}} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(ax^2+bx)}{x+\sqrt{ax^2+bx}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x^2-bx}{x+\sqrt{a}\,|x|}=2\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ \frac{-b}{2}=2\Rightarrow b=-4\end{cases}\Rightarrow ab=-4$$

راه دوم: با استفاده از جانشینی $\sqrt{ax^2+bx}$ با $\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$ در $+\infty$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})=\lim_{x\to+\infty}(1-\sqrt{a})x-\frac{b\sqrt{a}}{2a}=2$$

$$\Rightarrow a=1\Rightarrow -\frac{b}{2}=2\Rightarrow b=-4$$

(مد و بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۴۴)

---

۱۱ – گزینهٔ «۴» (رنا مودنجاری)

برای اینکه تابع $f(x)=(2x^2-mx+n)[\sqrt{x}]$ در نقاط $x=1$ و $x=4$ پیوسته شود بایستی ضریب جزء صحیح برابر با صفر شود، در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{ll} f(1)=0\Rightarrow & 2-m+n=0\\ f(4)=0\Rightarrow & 2(16)-4m+n=0\end{array}\right\}\Rightarrow m=10, n=8$$

درنتیجه $m+n=18$.

(مد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۲)

---

۱۲ – گزینهٔ «۴» (امیرهوشنگ انصاری)

با توجه به حد خواسته شده داریم:

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} f(f(\frac{4}{x}))$$

$$x\to(\frac{1}{2})^-: x<\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{1}{x}>2\xrightarrow{\times 4}\frac{4}{x}>6$$

یعنی در همسایگی چپ $\frac{1}{2}$، مقدار $\frac{4}{x}$ اندکی از ۶ بیش‌تر است. پس:

$$\frac{4}{x}=t: \lim_{t\to 6^+} f(f(t))$$

$$t\to 6^+: t>6\Rightarrow f(t)<4$$

یعنی در همسایگی راست ۶، مقدار $f(t)$ اندکی از ۴ کمتر است. پس:

$$f(t)=k:\ \lim_{k\to 4^-} f(k)=-4$$

(مد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۰ تا ۵۲)

---

۱۳ – گزینهٔ «۱» (پویان فهرانیان)

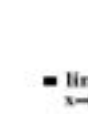
ضابطهٔ تابع f به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$f(x)=\frac{[x]^2-8}{-(x^2-6x+9)}=\frac{[x]^2-8}{-(x-3)^2}$$

حال حد تابع را در همسایگی عدد ۳ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{[x]^2-8}{-(x-3)^2}=\frac{(3)^2-8}{-(3^+-3)^2}=\frac{1}{-(0^+)^2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]^2-8}{-(x-3)^2}=\frac{(2)^2-8}{-(3^--3)^2}=\frac{-4}{-(0^-)^2}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$

پس نمودار تابع حولی $x=3$ به‌صورت  خواهد بود.

(مد و بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۴ تا ۵۲)

www.mapedu.ir

۱۴ – **گزینهٔ «۳»** (مجتبی نادری)

با ساده‌سازی حاصل حد کسر خواسته شده داریم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x^2-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\times\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}{(x^2-1)\times\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-\sqrt{x})\times(1+\sqrt{x})}{(x^2-1)\times\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}\times(1+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\overset{-1}{\cancel{1-x}}}{\cancel{(x-1)}(x+1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}(1+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{-1}{(2)\times\sqrt[3]{(1-\sqrt{1^+})^2}\times(2)}=\frac{-1}{4(0^+)}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

(مد در بی‌نهایت) [ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۲]

---

۱۵ – **گزینهٔ «۲»** (مهران حسینی)

فرض کنیم تابع f در نقطه‌ای به طول $x=k$ که $n\in\mathbb{Z}$ است پیوسته باشد در این‌صورت:

$$1)\ \lim_{x\to n^+}f(x)=[n^+]+0/2[n^+]^2=n+0/2n^2$$

$$2)\ \lim_{x\to n^-}f(x)=[n^-]+0/2[n^-]^2=n-1+0/2(n-1)^2$$

$$3)\ f(n)=[n]+0/2[n]^2=n+0/2n^2$$

$$n+0/2n^2=n-1+0/2(n-1)^2\Rightarrow 0/4n=-0/8\Rightarrow n=-2$$

فقط در یک نقطه به طول صحیح پیوسته است.

(حد و پیوستگی) [ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۲]

---

۱۶ – **گزینهٔ «۱»** (مهران حسینی)

برای پیوستگی تابع f در $x=8$ باید حد تابع و مقدار آن با هم برابر باشد:

$$1)\ \lim_{x\to 8}f(x)=\lim\frac{\sqrt{6-\sqrt[3]{x}}-2}{a(x-8)}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{6-\sqrt[3]{x}}-2}{a(x-8)}\times\frac{\sqrt{6-\sqrt[3]{x}}+2}{\sqrt{6-\sqrt[3]{x}}+2}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{\overset{2-\sqrt[3]{x}}{\overline{6-\sqrt[3]{x}-4}}}{a(x-8)(\sqrt{6-\sqrt[3]{x}}+2)}\times\frac{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{8-x}{a(x-8)(\sqrt{6-\sqrt[3]{x}}+2)(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{-1}{a(\sqrt{6-\sqrt[3]{x}}+2)(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{-1}{a\times 4\times 12}=\frac{-1}{48a}$$

$$2)\ f(8)=8-7=1$$

$$\frac{-1}{48a}=1\Rightarrow a=\frac{-1}{48}$$

[ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۲]

(ترکیبی) [ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳]

۱۷ – **گزینهٔ «۱»** (وحید ورن‌آبادی)

حاصل حد در $x\to -1$ به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3-x}}-2}{3x^2+5x+2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{3-x}}+2}{\sqrt{2+\sqrt{3-x}}+2}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2+\sqrt{3-x}-4}{(x+1)(3x+2)(\sqrt{2+\sqrt{3-x}}+2)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-2}{(x+1)(3x+2)(\sqrt{2+\sqrt{3-x}}+2)}\times\frac{\sqrt{3-x}+2}{\sqrt{3-x}+2}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)}{(x+1)(3x+2)(\sqrt{2+\sqrt{3-x}}+2)(\sqrt{3-x}+2)}$$

$$=\frac{-1}{(-1)(4)(4)}=\frac{1}{16}$$

[ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۲]

(ترکیبی) [ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳]

---

۱۸ – **گزینهٔ «۳»** (پویان طهرانیان)

خب حل مسأله را در چند حالت بررسی می‌کنیم:

فرض اول: $n<3\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{ax^n+3x^3+x-1}{x^m-3x-4}$

$$\sim\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3}{x^m}=3\neq 2$$

پس این حالت نشدنی است.

فرض دوم: $n=3\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{ax^n+3x^3+x-1}{x^m-3x-4}$

$$\sim\lim_{x\to +\infty}\frac{ax^3+3x^3}{x^m}=\frac{(a+3)x^3}{x^m}=2$$

$$m=3, a+3=2\Rightarrow a=-1\Rightarrow a+m=2$$

فرض سوم: $n>3\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{ax^n+3x^3+x-1}{x^m-3x-4}$

$$\sim\lim_{x\to +\infty}\frac{ax^n}{x^m}=2\xrightarrow{n-m>3}a=2$$

$$\xrightarrow{m=4\text{ یا }5\text{ یا }6\text{ یا }\ldots}a+m=6\text{ یا }7\text{ یا }8\text{ یا }\ldots$$

بنابراین $a+m$، نمی‌تواند ۵ باشد.

(مد در بی‌نهایت) [ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳]

---

۱۹ – **گزینهٔ «۲»** (پویان طهرانیان)

ابتدا رادیکال‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{2(x+1)}{x+1}-\frac{x+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{2-0}=\sqrt{2}$$

(مد در بی‌نهایت) [ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۶۳]

---

۲۰ – **گزینهٔ «۱»** (محمدرسول پیشوایی)

چون $x=2$ صورت را صفر می‌کند برای آنکه حاصل حد یک عدد حقیقی شود باید $x=2$ مخرج را هم صفر کند لذا:

$$\underset{\text{ریشه مخرج}}{x=2}\Rightarrow 16+2a-4=0\Rightarrow 2a=-12\Rightarrow a=-6$$

حال حد را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1-\sqrt{5x-1}}{2x^2-6x-4}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x+1-\sqrt{5x-1}}{2x^2-6x-4}$$

$$\times\frac{(x+1)+\sqrt{5x-1}}{(x+1)+\sqrt{5x-1}}\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2-(5x-1)}{(x-2)(2x^2+4x+2)(x+1+\sqrt{5x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+2}{(x-2)(2x^2+4x+2)(x+1+\sqrt{5x-1})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(2x^2+4x+2)(x+1+\sqrt{5x-1})}=\frac{1}{108}=k$$

پس $ak=\frac{-1}{18}$ است. لازم به ذکر است عبارت مخرج $(2x^2-6x-4)$ از تقسیم بر $x-2$ تجزیه گردیده است.

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۶)

(ترکیبی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

---

۲۱ – گزینهٔ «۲» (پریان طهرانیان)

با بررسی حد راست و حد چپ تابع در $x=2$ داریم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{a[x]-11}{16-x^2}\Rightarrow\frac{4a-11}{0^-}=-\infty\Rightarrow 4a-11>0\Rightarrow a>\frac{11}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{a[x]-11}{16-x^2}\Rightarrow\frac{4a-11}{0^+}=-\infty\Rightarrow 4a-11<0\Rightarrow a<\frac{11}{4}$$

$$\xrightarrow{\cap}\frac{11}{4}<a<\frac{11}{3}\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}}a=3$$

پس تنها یک مقدار صحیح برای a وجود دارد.

(حد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

---

۲۲ – گزینهٔ «۳» (اکبر کاظمکی)

ابتدا ضابطهٔ تابع $h(x)$ را به‌دست آورده و سپس شرط پیوستگی را برای تابع $f(x)$ می‌نویسیم:

$$g(x)=x^2-2\xrightarrow{\text{a واحد به چپ و b واحد به بالا}}h(x)=(x+a)^2+b-2$$

با بررسی پیوستگی در $x=0$ داریم:

$$h(0)=\lim_{x\to 0^+}h(x)=\lim_{x\to 0^-}(-2x+1)\Rightarrow a^2+b-2=1\Rightarrow a^2+b=3\ (I)$$

$$h(1)=\lim_{x\to 1^-}h(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+3)\Rightarrow (a+1)^2+b-2=4$$

$$\Rightarrow a^2+2a+b=5\ (II)$$

$$\xrightarrow{a^2+b=3\ (I)}2a+3=5\Rightarrow a=1,b=2$$

بنابراین: $a+b=1+2=3$

(حد و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۷ تا ۴۲)

---

۲۳ – گزینهٔ «۳» (رمضان پورعیم)

تابع خطی $f(x)=ax+b$ مفروض است داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-f(x))=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-1}{x+1}-ax-b\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-a)x^2+(-a-b)x-1-b}{x+1}=3$$

$$\begin{cases}3-a=0\to a=3\\ -a-b=3\xrightarrow{a=3}-3-b=3\Rightarrow b=-6\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=3x-6\Rightarrow f(1)=-3$$

روش دوم:

تابع $g(x)=\frac{3x^2-1}{x+1}$ را به‌صورت $g(x)=\frac{3x^2-3+2}{x+1}=3x-3+\frac{2}{x+1}$ می‌نویسیم، حال:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x-3+\frac{2}{x+1}-ax-b\right)=3\Rightarrow a=3,b=-6$$

$$f(x)=3x-6\Rightarrow f(1)=-3$$

(حد و بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

---

۲۴ – گزینهٔ «۲» (مهتی آبری)

با بررسی حد صورت و مخرج به صورت جداگانه داریم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(2f-3g)(x)}{f(x)+[g(x)]}=\frac{\lim_{x\to 2^-}(2f(x)-3g(x))}{\lim_{x\to 2^-}(f(x)+[g(x)])}$$

$$=\frac{2\lim_{x\to 2^-}f(x)-3\lim_{x\to 2^-}g(x)}{\lim_{x\to 2^-}f(x)+\lim_{x\to 2^-}[g(x)]}=\frac{(2\times 3)-(3\times 1)}{3+[1^-]}$$

$$=\frac{6-3}{3+0}=\frac{3}{3}=1$$

(حد و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۳۶)

---

۲۵ – گزینهٔ «۱» (محمدرسول پشتیانی)

چون نمودار در $x=3$ توخالی است، پس هم ریشه صورت و هم ریشه مخرج است یعنی $a=3$ و هم‌چنین با توجه به رفتار نمودار در اطراف $x=1$، باید $x=1$ ریشه مضاعف مخرج می‌باشد، با توجه به ضریب x^3 در مخرج داریم:

$$\text{مخرج}:(x-1)^2(x-3)=(x^2-2x+1)(x-3)$$

$$\text{مخرج}:x^3-3x^2-2x^2+6x+x-3$$

$$\text{مخرج}:x^3-5x^2+7x-3=x^3-bx^2+cx+d\Rightarrow\begin{cases}b=5\\c=7\\d=-3\end{cases}$$

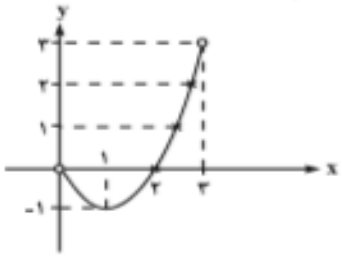
$$ab-cd=3(5)-7(-3)=15+21=36$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۶)

(ترکیبی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

۲۶ – گزینهٔ «۲» (پیام صمدی)

نمودار داخل براکت به فرم زیر است.



می‌دانیم توابع براکتی در نقاطی که داخل براکت صحیح می‌شود، پیوسته نیستند. اما در $x=1$ (نقطهٔ میانیمم این تابع درجهٔ ۲) پیوسته است. چون $\lim\limits_{x\to 1^-}[x^2-2x]=\lim\limits_{x\to 1^+}[x^2-2x]=-1$، همچنین $x=2$ ریشهٔ عبارت پشت براکت است. بنابراین در $x=2$ نیز پیوسته است. درنتیجه تابع اصلی در کل در دو نقطه پیوسته است.

(مد و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۷)

---

۲۷ – گزینهٔ «۳» (سروش موئینی)

با جای‌گذاری $\frac{\pi}{2}$ در کسر به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. صورت را گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{-\cos 2x}}{\cos^2 x}=\frac{\sin x-(-\cos 2x)}{\cos^2 x(\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\cos 2x})}$$

$$=\frac{\cos 2x+\sin x}{\cos^2 x\underbrace{(\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\cos 2x})}_{\text{این در }\frac{\pi}{2}\text{ می‌شود }2}}=\frac{1-2\sin^2 x+\sin x}{2\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+2\sin x)}{2(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1+2}{2(1+1)}=\frac{3}{4}$$

(آرکی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۸ تا ۳۹) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۷)

---

۲۸ – گزینهٔ «۳» (علی‌اصغر شریفی)

طبق توضیحات داده شده، چند جمله‌ای $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x)=ax(x+1)(x+2)(x+3)$$

با توجه به باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)$، داریم:

$$x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow a\times 1(1+1)(1+2)(1+3)=2$$

$$\Rightarrow 24a=2\Rightarrow a=\frac{1}{12}$$

باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-3)$ برابر است با:

$$R=f(3)=\frac{1}{12}\times 3(3+1)(3+2)(3+3)=10$$

پس طبق رابطهٔ تقسیم داریم:

$$f(x)=(x-3)Q(x)+10$$

با جای‌گذاری $x=3$ در رابطهٔ بالا خواهیم داشت:

$$f(3)=(3-3)Q(3)+10$$

$$\Rightarrow\frac{1}{12}\times 3(3+1)(3+2)(3+3)=Q(3)+10\Rightarrow Q(3)=20$$

(مد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۰ تا ۵۳)

۲۹ – گزینهٔ «۱» (فرشاد حسن‌زاده)

توجه کنید که تابع $y=\frac{2}{x^2}$ در اطراف $x=\frac{-1}{3}$ تابع صعودی است، پس:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{3})^+}[\frac{2}{x^2}]=18$$

و تابع $y=\frac{-1}{x^2}$ در اطراف $x=\frac{-1}{3}$ تابع نزولی است، پس:

حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{3})^+}[\frac{-1}{x^2}]=-10$$

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{3})^+}\frac{3x-20+18}{6x+12-10}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

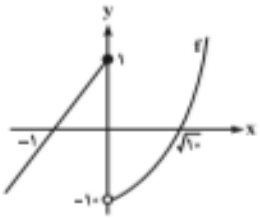
(مد در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

---

۳۰ – گزینهٔ «۳» (سید بوار نظری)

با توجه به تابع f، ضابطه تابع $fof(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$fof(x)=\begin{cases}x+2 & , \quad x\le -1\\ (x+1)^2-10 & , \quad -1<x\le 0\\ x^2-10+1=x^2-9 & , \quad 0<x\le\sqrt{10}\\ (x^2-10)^2-10=x^2-20x+90 & , \quad x>\sqrt{10}\end{cases}$$



حال پیوستگی تابع $fof(x)$ را در نقاط مرزی $x=-1$، $x=0$ و $x=\sqrt{10}$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^-}fof(x)=1\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}fof(x)=-10\end{cases}\Rightarrow +1\ne -10\Rightarrow$$

تابع $fof(x)$ در نقطهٔ $x=-1$ پیوسته نیست.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}fof(x)=-9\\ \lim\limits_{x\to 0^+}fof(x)=-9\end{cases}\Rightarrow$$

تابع $fof(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\sqrt{10})^-}fof(x)=1\\ \lim\limits_{x\to(\sqrt{10})^+}fof(x)=-10\end{cases}\Rightarrow 1\ne -10\Rightarrow$$

تابع $fof(x)$ در نقطهٔ $x=\sqrt{10}$ پیوسته نیست.

بنابراین تابع $fof(x)$ در دو نقطه به طول‌های $x=-1$ و $x=\sqrt{10}$ پیوسته نیست.

(مد و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۲)

www.mapedu.ir

۳۱ ــ گزینهٔ «۲» (محمدسجاد پیشوایی)

کافی است خارج قسمت را برابر صفر قرار داده و ریشه آن را جایگذاری کنیم.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(x+1)-P(x-1)=P(3)-P(1) \quad (*)$$

$$P(x)=(x^2-4x+3)q(x)+(3x-2)$$
$$P(x)=(x-3)(x-1)q(x)+(3x-2)$$
$$\left.\begin{array}{l} P(3)=0+3(3)-2=7 \\ P(1)=0+3(1)-2=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{(*)} P(3)-P(1)=6$$

(حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت) [ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲]

---

۳۲ ــ گزینهٔ «۱» (علیرضا نوابی‌زر)

$$f(x+1)=\sqrt{x+2}+2 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x+1}+2$$
$$\sqrt{x+1}=y-2 \Rightarrow f^{-1}(x)=(x-2)^2-1=x^2-4x+3$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt{2x+3}-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{2x+3}-3}\times\frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)(6)}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(6)}{2}=\frac{2\times 6}{2}=6$$

(ترکیبی) [ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴ و ۳۶ تا ۳۶]

[ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۳۹ و ۵۱ تا ۵۳]

---

۳۳ ــ گزینهٔ «۱» (حمید علیزاده)

$$\lim_{x\to a^-}\frac{\sqrt[3]{x-1}-b}{|x-a|}=\frac{\sqrt[3]{a-1}-b}{0}=\frac{0}{0} \Rightarrow \sqrt[3]{a-1}=b \Rightarrow a=b^3+1 \ (*)$$
$$\lim_{x\to a^-}\frac{\sqrt[3]{x-1}-b}{-(x-a)}\times\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}+b^2+b\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+b^2+b\sqrt[3]{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to a^-}\frac{x-1-b^3}{-(x-a)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+b^2+b\sqrt[3]{x-1})}$$
$$\xrightarrow{*}\lim_{x\to a^-}\frac{x-a}{-(x-a)(b^2+b^2+b^2)}=\frac{-1}{3b^2}=\frac{-1}{3} \Rightarrow b^2=1$$
$$\begin{cases} b=1 \xrightarrow{*} a=2 \\ b=-1 \xrightarrow{*} a=0 \end{cases}$$

(ترکیبی) [ریاضی ۲، صفحه‌های ۶۹ تا ۸۶]

[ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳]

---

۳۴ ــ گزینهٔ «۲» (امیرهوشنگ انصاری)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(a\sin x-b)=0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{b+3}{b\sin x-b}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{b+3}{b}\times\frac{1}{\sin x-1}=+\infty$$

چون $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x-1}=-\infty$ است پس باید $\frac{b+3}{b}<0$ باشد. یعنی:

$$\frac{b+3}{b}<0 \Rightarrow -3<b<0 \Rightarrow -3<a<0 \Rightarrow a=\{-2,-1\}$$

۲ مقدار صحیح برای a وجود دارد.

(حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت) [ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷]

---

۳۵ ــ گزینهٔ «۱» (سیدبهزاد نقوی)

$f(x)$ را برابر t فرض کرده و با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} x\to+\infty \Rightarrow f(x)=t\to 1^+ \\ x\to-\infty \Rightarrow f(x)=t\to 1^- \end{cases} \qquad \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x))}{\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))}=\frac{\lim\limits_{t\to 1^-} f(t)}{\lim\limits_{t\to 1^+} f(t)}=\frac{-1}{2}$$

(حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت) [ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳]

۳۶ ــ گزینهٔ «۱» (مهدی براتی)

چون حاصل حد موجود و غیرصفر است، باید درجهٔ صورت و مخرج یکسان باشد.

پس باید ضریب x^2 در صورت صفر باشد. هم‌چنین نسبت ضریب x صورت به ضریب x مخرج برابر با حاصل حد است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a(2x-1)^2+b(x+3)^2}{8x+10}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a(4x^2-4x+1)+b(x^2+6x+9)}{8x+10}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4a+b)x^2+(-4a+6b)x+a+9b}{8x+10}$$

ضریب x^2: $4a+b=0$

ضریب x: $\frac{-4a+6b}{8}=-7 \Rightarrow -4a+6b=-56$

$$\begin{cases} 4a+b=0 \\ -4a+6b=-56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-8 \end{cases} \Rightarrow a+b=-6$$

(حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت) [ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳]

---

۳۷ ــ گزینهٔ «۳» (سروش موئلی)

پرانتز سمت راست را در مزدوج خود ضرب و تقسیم کنیم:

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x^2+3\sqrt{x}}-x)\times\frac{\sqrt{x^2+3\sqrt{x}}+x}{\sqrt{x^2+3\sqrt{x}}+x}$$
$$=(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\times\frac{x^2+3\sqrt{x}-x^2}{\sqrt{x^2+3\sqrt{x}}+x}$$

حد در $+\infty$ می‌شود:

$$\xrightarrow[\text{پرتوان را برداریم}]{\text{فقط جمله‌های}} \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x}\times\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x}=3$$

(حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت) [ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳]

---

۳۸ ــ گزینهٔ «۱» (حمید علیزاده)

با توجه به شرط پیوستگی از چپ داریم:

$$\lim_{x\to 9^-} f(x)=f(9)$$
$$\Rightarrow a=\lim_{x\to 9^-}\frac{\sqrt{\sqrt{x}-2}-1}{\sqrt{x}-|\sqrt{x}|-1}=\frac{0}{0} \text{ مبهم}$$
$$\lim_{x\to 9^-}\frac{\sqrt{\sqrt{x}-2}-1}{\sqrt{x}-|3^-|-1}\times\frac{\sqrt{\sqrt{x}-2}+1}{\underbrace{\sqrt{\sqrt{x}-2}+1}_{2}}=\lim_{x\to 9^-}\frac{\sqrt{x}-2-1}{(\sqrt{x}-2-1)(2)}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

حاصل حد تابع f در $+\infty$ برابر است با:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}x^2+3}{1-2x^2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-2x^2}=-\frac{1}{4}=-0/25$$

(حد و پیوستگی) [ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۷ تا ۴۲]

---

۳۹ ــ گزینهٔ «۴» (امیرهوشنگ انصاری)

اگر $x=a$ داخل براکت را به عدد صحیح تبدیل کند، ناپیوسته است.

مگر (۱): $x=a$ نقطهٔ می‌نیمم باشد. مانند $x=0$ در تابع $y=[x^2]$

(۲): پشت براکت عامل صفرکننده $(x-a)$ ضرب شده باشد.

تابع $f(x)=(x-1)[x^2]$ در نقاط $\{\ldots,-\sqrt{3},-\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots\}$ مشکوک ناپیوستگی هستند چون داخل براکت را به عدد صحیح تبدیل کرده‌اند اما $x=0$ و $x=1$ به‌دلایل گفته شده نقاط پیوسته‌اند. در نتیجه تابع در بازهٔ $[-\frac{1}{2},\sqrt{2})$ پیوسته است و بیش‌ترین k برابر $\sqrt{2}$ است.

(حد و پیوستگی) [ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۷ تا ۴۲]

www.mapedu.ir

۴۰ – گزینهٔ «۳» (سروش مولایی)

در مقایسه با تعریف مشتق، حد صورت سؤال می‌گوید $f(2)=0$ و $f'(2)=-1$ که در گزینهٔ «۳» رعایت شده است.

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)

---

۴۱ – گزینهٔ «۱» (سهیل حسن‌نژادپور)

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ ناپیوسته است. اما چون حاصل تابع $g(x)$ در این نقطه صفر می‌شود، پس $g(x)$ در این نقطه پیوسته خواهد بود. پس برای مشتق آن طبق تعریف داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x-2}{f(x)+3}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(f(x)+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{f(x)+3}=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$$

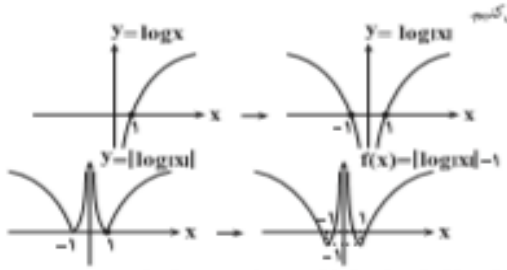
دقت کنید در مرحلهٔ آخر در عبارت فوق باید به‌جای $f(x)$ حد آن در $x=1$ را قرار دهیم، نه مقدار آن.

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)

---

۴۲ – گزینهٔ «۲» (سهیل حسن‌نژادپور)

ابتدا نمودار تابع $f(x)=\big||\log|x||-1\big|$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور ابتدا نمودار $y=\log x$ سپس $y=\log|x|$، بعد از آن $\big||\log|x||\big|$ و درنهایت $f(x)=\big||\log|x||-1\big|$ را رسم می‌کنیم.



حال ریشه‌های معادله را می‌یابیم تا نقاط برخورد با محور xها پیدا شود.

$$\big||\log|x||-1\big|=0\Rightarrow\big||\log|x||\big|=1\Rightarrow\log|x|=\pm 1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|x|=10\Rightarrow x=\pm 10\\ |x|=\frac{1}{10}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{10}\end{cases}$$

حال جدول تعیین علامت برای f و f' رسم می‌کنیم. دقت می‌کنیم علامت مشتق در نقاط $-1, 1, 0$ تغییر کرده است.

		-10		-1		$-\frac{1}{10}$		0		$\frac{1}{10}$		1		10	
f	+		−		−		+		+		−		−		+
f'	−		−		+		+		−		−		+		+
$\frac{f}{f'}$	−		+		−		+		−		+		−		+

با توجه به گزینه‌ها تنها در بازهٔ $(-1,-\frac{1}{10})$ مقدار $\frac{f}{f'}$ منفی است.

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)

۴۳ – گزینهٔ «۴» (سروش مولایی)

راه حل اول:

$$(h\to 0^-)\Rightarrow(1+h\to 1^-)\Rightarrow f(1+h)=3(1+h)-1=3h+2$$

$$(h\to 0^-)\Rightarrow(1-2h\to 1^+)\Rightarrow f(1-2h)=5(1-2h)-3=2-10h$$

$$\Rightarrow\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3h+2-(2-10h)}{h}=13$$

راه حل دوم: اگر $f(1)$ را اضافه و کم کنیم به دوتا تعریف مشتق می‌رسیم:

$$\lim_{h\to 0^-}\Big(\underbrace{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}_{=f'(1^-)}+\underbrace{\frac{f(1)-f(1-2h)}{h}}_{=2f'(1^+)}\Big)=f'(1^-)+2f'(1^+)$$

می‌دانیم شیب مماس (مشتق) در عبارت‌های خطی برابر شیب خط است پس $f'(1^+)=5$ و $f'(1^-)=3$ و جواب می‌شود: $3+2\times 5=13$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)

www.mapedu.ir

۴۴ – گزینهٔ «۱» (یاسمن سپهر)

در یک همسایگی محذوف $x=0$، تابع $y=1-\cos x$ همواره کمتر از ۱ است. بنابراین در این همسایگی تابع $y=[1-\cos x]$ با تابع $y=0$ مساوی است و در نتیجه تابع $y=\frac{[1-\cos x]}{x^2}$ نیز مساوی تابع ثابت صفر است. پس حد مورد نظر برابر صفر است.

(مد و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۶)

---

۴۵ – گزینهٔ «۴» (سمیر عنایتپور)

با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax-x^2)=a-1=-2\Rightarrow a=-1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x+b}-1=\sqrt{1+b}-1=1\\ \Rightarrow \sqrt{1+b}=2\Rightarrow 1+b=4\Rightarrow b=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{2b}{a})=f(6)=\sqrt{6+3}-1=2$$

(مد و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۶)

۴۶ – گزینهٔ «۱» (عادل صمدی)

a باید برابر حد تابع f در $x=1$ باشد:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2-|3-x|}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{2-(3-x)}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{-(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

پس باید $a=-\frac{1}{2}$ باشد.

(مد و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۲)

---

۴۷ – گزینهٔ «۴» (مرتضی فهیم‌نوری)

تابع در $x=2$ پیوسته است، پس $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ است.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=([2^-]-a)[4^-]=3(1-a)=3-3a\\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=(2-a)(4)=8-4a\end{cases}$$

برای پیوستگی باید داشته باشیم:

$$3-3a=8-4a\Rightarrow a=5\Rightarrow f(x)=([x]-5)[2x]$$

$$\xrightarrow{a=5}\lim_{x\to 5^-} f(x)=([5^-]-5)[10^-]=(4-5)(9)=-9$$

(مد و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۲)

۴۸ – گزینهٔ «۳» (سروش مولایی)

چون حد مخرج صفر و حاصل حد عددی حقیقی است پس حد صورت هم صفر است.

$$2-\sqrt{2+b}=0\Rightarrow\sqrt{2+b}=2\Rightarrow 2+b=4\Rightarrow b=6$$

و داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+6}}{x-2}=a\xrightarrow{\text{ضرب در مزدوج}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(x+6)}{(x-2)(x+\sqrt{x+6})}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-6}{(x-2)(x+\sqrt{x+6})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+\sqrt{x+6}}=a=\frac{5}{6}$$

پس $a+b=\frac{5}{6}+6=\frac{41}{6}$

(تکمیلی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶)

۴۹ – گزینهٔ «۲» (ضحی علیزاده)

نقطهٔ توخالی در شکل ریشه مشترک صورت و مخرج است پس $x=-1$ می‌باشد.

از طرفی با توجه به نمودار $f(x)$، $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})} f(x)=+\infty$ است پس $x=\frac{1}{2}$

ریشه مضاعف مخرج است پس:

$$2x^3+ax^2+bx+c=2(x+1)(x-\frac{1}{2})^2=(x+1)(2x-1)^2$$

حال b را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=b\Rightarrow\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x+1)(2x-1)^2}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(2x-1)^2}=\frac{1}{9}=b$$

(تکمیلی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۷) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶)

---

۵۰ – گزینهٔ «۴» (آریان خیری)

دامنهٔ تابع را بدست می‌آوریم: اولاً $1-x^2\geq 0\Rightarrow -1\leq x\leq 1$

ثانیاً $x-\frac{1}{2}[2x]\neq 0\Rightarrow 2x\neq[2x]\Rightarrow 2x\neq k(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow x\neq\frac{k}{2}$

$$\xrightarrow{-1\leq x\leq 1} x\neq 0\ ,\ \pm\frac{1}{2}\ ,\ \pm 1$$

پس نهایتاً دامنهٔ تابع برابر است با:

$$D_f=(-1,1)-\{0,\pm\frac{1}{2}\}$$

واضح است که این بازه در نقاط $\pm\frac{1}{2}$ و $x=0$ دارای همسایگی محذوف و در نقاط $x=\pm 1$ دارای همسایگی یکطرفه است پس:

$$\begin{cases}m=0\ \text{یا}\ \frac{1}{2}\ \text{یا}\ \frac{-1}{2}\\ n=1\ \text{یا}\ -1\end{cases}$$

$$m\times n=0\ \text{یا}\ \frac{1}{2}\ \text{یا}\ \frac{-1}{2}$$

(مد، پیوستگی و مد در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

---

۵۱ – گزینهٔ «۳» (سروش مولایی)

ضرب اعداد وقتی صفر است که حداقل یکی از آنها صفر باشد پس توانها مهم نیستند و همان معادله را بدون توان داریم:

$$\underbrace{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}_{\frac{1}{2}\sin x}\cos x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{8}\sin 4x=0$$

$$\Rightarrow 4x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}$$

که به ازای $k=1,2,3,\dots,7$ در فاصلهٔ $(0,2\pi)$ معادله برقرار است.

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۸)

www.mapedu.ir

۴۸- گزینهٔ «۱» (وحید رامتی)

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}} \frac{[\sin x]+2}{\cos 2x-1} = \frac{[-\frac{\sqrt{2}}{2}]+2}{0-1} = \frac{-1+2}{-1} = -1$$

(در و پیوستگی) (ریاضی ۲، مقدمه‌ای ۱۳۰ تا ۱۳۶)

۴۹- گزینهٔ «۳» (سروش موذنی)

چون حد مخرج صفر و حاصل حد، عددی حقیقی است پس حد صورت هم صفر است.

$$2-\sqrt{2+b}=0 \Rightarrow \sqrt{2+b}=2 \Rightarrow 2+b=4 \Rightarrow b=6$$

و داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+6}}{x-2} = a \xrightarrow{\text{ضرب در مزدوج}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-(x+6)}{(x-2)(x+\sqrt{x+6})} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-6}{(x-2)(x+\sqrt{x+6})}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+\sqrt{x+6}} = a = \frac{5}{6}$$

پس $a+b=\frac{5}{6}+6=\frac{41}{6}$

(لگرمی) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۱ تا ۵۳) (ریاضی ۲، مقدمه‌ای ۱۳۰ تا ۱۳۶)

۵۰- گزینهٔ «۲» (محمد عظیم‌زاده)

نقطهٔ توخالی در شکل ریشه مشترک صورت و مخرج است پس $x=-1$ می‌باشد.

از طرفی با توجه به نمودار $f(x)$، $\lim_{x\to(\frac{1}{2})} f(x)=+\infty$ است پس $x=\frac{1}{2}$

ریشه مضاعف مخرج است پس:

$$2x^3+ax^2+bx+c=2(x+1)(x-\frac{1}{2})^2=(x+1)(2x-1)^2$$

حال b را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=b \Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x+1)(2x-1)^2} = \lim_{x\to -1}\frac{1}{(2x-1)^2}=\frac{1}{9}=b$$

(لگرمی) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۱ تا ۵۷) (ریاضی ۲، مقدمه‌ای ۱۳۰ تا ۱۳۶)

۵۱- گزینهٔ «۴» (آریان عدری)

دامنهٔ تابع را بدست می‌آوریم: اولاً $1-x^2\ge 0 \Rightarrow -1\le x\le 1$

ثانیاً $x-\frac{1}{2}[2x]\ne 0 \Rightarrow 2x\ne[2x] \Rightarrow 2x\ne k(k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow x\ne\frac{k}{2}$

$$\xrightarrow{-1\le x\le 1} x\ne 0\ ,\ \pm\frac{1}{2}\ ,\ \pm 1$$

پس نهایتاً دامنهٔ تابع برابر است با:

$$D_f=(-1,1)-\{0,\pm\frac{1}{2}\}$$

واضح است که این بازه در نقاط $\pm\frac{1}{2}$ و $x=0$ دارای همسایگی محذوف و در نقاط $x=\pm 1$ دارای همسایگی یکطرفه است پس:

$$\begin{cases} m=0 \text{ یا } \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{-1}{2} \\ n=1 \text{ یا } -1 \end{cases}$$

$$m\times n=0 \text{ یا } \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{-1}{2}$$

(در بی‌نهایت و در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۳ تا ۵۷)

۵۲ گزینهٔ «۳» (سید نوید نظری)

با توجه به $\lim\limits_{x\to -2} f^{-1}(x)=1$، می‌توان نتیجه گرفت که حداقل یکی از دو حد چپ و راست تابع f در $x=1$ برابر (-2) است. پس:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt[3]{2x+6}}{x-(a+1)\sqrt{x}+a}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt[3]{2x+6}}{x-(a+1)\sqrt{x}+a}\times\underbrace{\frac{(2^2+2\sqrt[3]{2x+6}+\sqrt[3]{(2x+6)^2})}{(2^2+2\sqrt[3]{2x+6}+\sqrt[3]{(2x+6)^2})}}_{=12}$$

$$=-2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{8-(2x+6)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-a)(12)}=-2\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{-2(x-1)}{12(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-a)}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{-2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{12(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-a)}=-2$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{-(\sqrt{x}+1)}{6(\sqrt{x}-a)}=-2\Rightarrow\frac{-2}{6(1-a)}=-2$$

$$\Rightarrow 6-6a=1\Rightarrow a=\frac{5}{6}\Rightarrow[a]=[\frac{5}{6}]=0$$

(ترکیبی) (ریاضی ۲، صفحه‌ی ۳۰ تا ۳۶) (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۵۱ تا ۵۳)

۵۳ – گزینهٔ «۴» (آریان عمری)

از آن‌جا که باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر عبارت $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ برابر با $\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ است، به‌جای یافتن باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر هر یک از عوامل $(x-3)$ و $(x+1)$، می‌توان باقیمانده تقسیم $\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ (یعنی باقیمانده قبلی) را بر هریک از این عوامل حساب کرد:

الف)

$$\underbrace{\text{باقیمانده تقسیم } f(x) \text{ بر } x-3}_{f(3)}=\underbrace{\text{باقیمانده تقسیم } (g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}) \text{ بر } x-3}_{g(3)=5}$$

پس $f(3)=5$

ب)

$$\underbrace{\text{باقیمانده تقسیم } f(x) \text{ بر } x+1}_{f(-1)}=\underbrace{\text{باقیمانده تقسیم } (g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}) \text{ بر } x+1}_{g(-1)=3}$$

پس $f(-1)=3$

در پایان برای محاسبهٔ باقیمانده تقسیم $f(f(x^3+x-3))$ بر $x-1$، کافی است $x=1$ را در آن جایگذاری کنیم:

$$f(f(x^3+x-3))\xrightarrow{x=1}f(\underbrace{f(-1)}_{3})=5$$

(در بی‌نهایت و غیر در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۵۰ و ۵۱)

۵۴– گزینهٔ «۱» (سروش موذنی)

$$\frac{\lim\limits_{x\to n^+}f(x)}{\lim\limits_{x\to n^-}f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to n^+}x[x]}{\lim\limits_{x\to n^-}x[x]}=\frac{n^2}{n(n-1)}\xrightarrow{n\neq 0}\frac{n}{n-1}=1/02$$

$$=\frac{n}{n-1}=\frac{51}{50}$$

$$\Rightarrow n=51\xrightarrow{\text{مجموع ارقام}}6$$

(در و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌ی ۲۸ تا ۳۶)

---

۵۵ گزینهٔ «۲» (آریان عمری)

با توجه به نمودار f، به محاسبهٔ حدود داده شده می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to 2^+}f([x])=\lim_{x\to 2^+}f(2)=\lim_{x\to 2^+}3=3$$

$$\lim_{x\to 2^+}[f(x)]=\lim_{x\to 2^+}[1^-]=\lim_{x\to 2^+}0=0$$

$$[\lim_{x\to 2^+}f(x)]=[1]=1$$

دقت کنید که در مورد آخر، ابتدا باید مقدار حد راست تابع f در نقطهٔ $x=2$ محاسبه شود (که برابر یک است) و سپس از عدد حد حاصل، جزء صحیح گرفته شود:

$$[1]=1$$

پس مجموع مقادیر بالا برابر است با: $3+0+1=4$

(در و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌ی ۳۰ تا ۳۶)

۵۶– گزینهٔ «۳» (رادان نراصمی)

با قرار دادن $x=2$ به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم که نیاز به رفع ابهام دارد. برای رفع ابهام از اتحادهای جالب و لاغر و مزدوج برای صورت و اتحاد مزدوج برای مخرج استفاده می‌کنیم داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x}-2}$$

$$\times\underbrace{\frac{\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x+2}}}_{\text{مزدوج صورت}}\times\underbrace{\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2}}_{\text{مزدوج مخرج}}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt[3]{(x+6)^2}-(x+2))\times 2}{(2x-4)\times 4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x+6)^2}-(x+2)}{2x-4}$$

$$\times\frac{\sqrt[3]{(x+6)^2}+\sqrt[3]{(x+6)^2}\times(x+2)+(x+2)^2}{\underbrace{\sqrt[3]{(x+6)^2}+\sqrt[3]{(x+6)^2}\times(x+2)+(x+2)^2}_{16}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{((x+6)^2-(x+2)^3)}{(2x-4)\times 48}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+12x+36-(x^3+6x^2+12x+8)}{2(x-2)\times 48}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(-x^2-7x-14)}{96(x-2)}=\frac{-1}{3}$$

(ترکیبی) (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۵۱ تا ۵۳) (ریاضی ۲، صفحه‌ی ۲۸ تا ۳۶)

۵۷– گزینهٔ «۳» (رضا علی‌نواز)

باید حد تابع f در $x=1$ با مقدار تابع در نقطهٔ $x=1$ برابر باشد:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\pi x+\cos 2\pi x}{\sin^2\pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos\pi x+2\cos^2\pi x-1}{1-\cos^2\pi x}$$

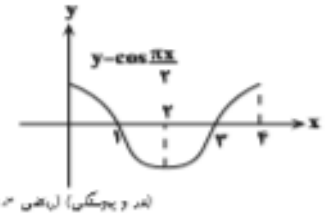
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2\cos\pi x-1)(\cos\pi x+1)}{(1-\cos\pi x)(1+\cos\pi x)}=\frac{-2-1}{1-(-1)}=\frac{-3}{2}=f(1)=a$$

۵۸- گزینهٔ «۳» (عباس اشرفی)

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و در همسایگی $x=a$ اکیداً نزولی، به شرط این‌که مقدار $f(a)$ عددی صحیح باشد، تابع $y=[f(x)]$ در این نقطه فقط پیوستگی چپ دارد.

تابع $y=x^3+x$ و $y=-\frac{1}{x}$ در همسایگی $x=1$ اکیداً صعودی هستند و تابع $y=x^3-2x$ در همسایگی چپ $x=1$ اکیداً نزولی و در همسایگی راست $x=1$ اکیداً صعودی است.

با رسم نمودار تابع $y=\cos\frac{\pi x}{2}$ متوجه می‌شویم که این تابع در همسایگی $x=1$ اکیداً نزولی است و تابع $h(x)$ در $x=1$ فقط از چپ پیوسته است.



(در و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۲)

۵۹- گزینهٔ «۴» (پویان ظهیرالدین)

شرط پیوستگی:

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=f(-1)$$

پس:

$$\lim_{x\to(-1)^+} k[-x]-[x^2]^2=k[1^-]-[1^-]^2=0$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} k[-x]-[x^2]^2=k[1^+]-[1^+]^2=k-1$$

$$f(-1)=k[-(-1)]-[1]^2=k-1$$

پس داریم:

$$k-1=0\Rightarrow k=1$$

(در و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۲)

۶۰- گزینهٔ «۱» (اسماعیل حسن‌زاده‌پور)

چون حاصل حد برابر $-\infty$ شده است، قطعاً $x=2$ ریشه مخرج است و چون حد چپ و راست تابع در $x=2$ همعلامت شده، ریشه $x=2$ قطعاً مضاعف خواهد بود.

$$x^3+ax^2+bx-12=(x-2)^2(x-c)$$

$$=(x^2-2x+2)(x-c)=x^3+(-2-c)x^2+(2+2c)x-2c$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2c=-12\Rightarrow c=3\\ b=2+2c\Rightarrow b=16\\ a=-2-c\Rightarrow a=-7\end{cases}$$

$$\Rightarrow b+2a=16-14=2$$

(در و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

۶۱- گزینهٔ «۱» (مصطفی کرمی)

در $-\infty$ عبارت به‌صورت $\frac{-3x^9}{x^6}$ یا همان $-3x^3$ است که $+\infty$ می‌شود و از روی نمودار، $f(+\infty)$ برابر 3^- و جزء صحیح آن برابر ۲ می‌شود.

(در و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۶۲- گزینهٔ «۱» (سیدهوشنگ انصاری)

راه حل اول:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(\sqrt{\frac{x+k}{x+1}}-1)(\sqrt{\frac{x+k}{x+1}}+1)}{\sqrt{\frac{x+k}{x+1}}+1}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(\frac{x+k}{x+1}-1)}{\sqrt{\frac{x+k}{x+1}}+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{(k-1)x}{x+1}}{\sqrt{\frac{x}{x}}+1}=\frac{\frac{k-1}{1}}{2}=2\Rightarrow k=5$$

راه حل دوم:

$$x\sqrt[n]{\frac{kx+a}{kx+b}}\underset{x\to\infty}{\sim}x+\frac{a-b}{nk}\xrightarrow{\text{حل}}x+\frac{k-1}{2}-x=2$$

هم‌ارزی

$$\frac{k-1}{2}=2\Rightarrow k=5$$

(در و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۶۳- گزینهٔ «۱» (پویان ظهیرالدین)

صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+1}{\sqrt{3+\sqrt{-x}}-2}\times\frac{\sqrt{3+\sqrt{-x}}+2}{\sqrt{3+\sqrt{-x}}+2}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2+1)(\sqrt{3+\sqrt{-x}}+2)}{3+\sqrt{-x}-4}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2+1)(2)}{\sqrt{-x}-1}\times\frac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2+1)(2)(2)}{-x-1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)(8)}{-(x+1)}=\lim_{x\to-1}-(x^2-x+1)(8)$$

$$=(-1)(3)(8)=-24$$

(در و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۳۶)

۶۴- گزینهٔ «۴» (سروش مولایی)

$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-(1-x^2)}{1+\sqrt{1-x^2}}}=\sqrt{\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{|x|}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

www.mapedu.ir

$$\xrightarrow{x<0} \frac{-x}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-x}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}}{-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(در و پیوستگی) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۶۵- گزینهٔ «۴» (علیرضا نادپور)

برای آن‌که این تابع پیوسته باشد، بایستی داشته باشیم:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

$$f(1) \Rightarrow (a+1)[\frac{2}{1}] = 2(a+1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax+1)[\frac{2}{x}] = (a+1)[2^-] = (a+1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2bx+1) = 2b+1$$

$$\underbrace{2(a+1) = a}_{\substack{2a+2=a+1 \\ a=-1}} \underbrace{+1 = 2b+1}$$

$$0 = 2b+1 \Rightarrow b = \frac{-1}{2}$$

در نتیجه $a+b = -\frac{3}{2}$ می‌باشد.

(در و پیوستگی) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۳۷ تا ۱۴۲)

۶۶- گزینهٔ «۳» (نصرت‌ها زکی‌زاده)

چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-4 بخش‌پذیر است پس بر $x-2$ و $x+2$ نیز بخش‌پذیر است.

$$\begin{cases} p(2)=0 \\ p(-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32+4m+2n+32=0 \\ -32+4m-2n+32=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-8 \\ n=-16 \end{cases} \Rightarrow m-n=8$$

(در بی‌نهایت و در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵ تا ۳۰)

۶۷- گزینهٔ «۴» (رنگ سادات)

با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{1-f(x)} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

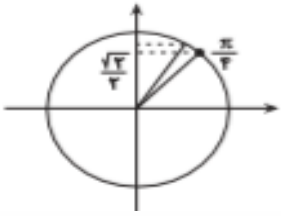
(در بی‌نهایت و در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۳ تا ۵۷)

۶۸- گزینهٔ «۲» (آریان نصری)

در ناحیهٔ اول با افزایش x، $\sin x$ هم افزایش می‌یابد.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{\sqrt{2}\sin x+1}{\sqrt{2}\sin x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

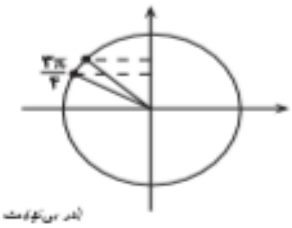
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{2}\sin x+1}{\sqrt{2}\sin x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$



در ناحیهٔ دوم با افزایش x، $\sin x$ کاهش می‌یابد.

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^+} \frac{\sqrt{2}\sin x+1}{\sqrt{2}\sin x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{2}\sin x+1}{\sqrt{2}\sin x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$



(در بی‌نهایت و در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۳ تا ۵۷)

۶۹- گزینهٔ «۲» (مصدرحسن سلطانی‌نسبی)

چون صورت در $x\to -1$ برابر صفر است پس مخرج نیز باید در $x\to -1$ برابر صفر شود. همینطور چون جواب حد برابر $+\infty$ است پس مخرج بعد از ساده شدن باید دارای ریشهٔ مضاعف باشد (در $x=-1$) یعنی مخرج باید به‌صورت $(x+1)^3$ باشد پس:

$$x^3+ax^2+bx+c = (x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases}$$

پس $\frac{a+b}{c} = 6$

(در بی‌نهایت و در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۳ تا ۵۷)

۷۰- گزینهٔ «۴» (سهیل عسگرنادپور)

ابتدا عبارت مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$2x^2-5x-3 = (x-3)(2x+1)$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2[x]+3k}{(x-3)(2x+1)} = \frac{6+3k}{0^+} = +\infty \Rightarrow 6+3k>0 \Rightarrow k>-2 \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2[x]+3k}{(x-3)(2x+1)} = \frac{4+3k}{0^-} = +\infty \Rightarrow 4+3k<0 \Rightarrow k<-\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$(1)\cap(2) \Rightarrow -2<k<-\frac{4}{3}$$

(در بی‌نهایت و در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۳ تا ۵۷)

۷۱- گزینهٔ «۲» (آریان نصری)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}-(x^2-x)}{x} \times \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}+(x^2-x)}{\sqrt{x^4+x^2+1}+(x^2-x)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+x^2+1-(x^2-x)^2}{x(x^4+x^2)} = \frac{3x^2}{2x^3} = \frac{3}{2}$$

(در بی‌نهایت و در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۱ تا ۶۴)

۷۲- گزینهٔ «۱» (نصرت‌ها زکی‌زاده)

$$\frac{x}{2x+1} + \frac{x}{2x-1} = \frac{4x^2}{4x^2-1} = 1+\frac{1}{4x^2-1} > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} [\frac{x}{2x+1} + \frac{x}{2x-1}] = \lim_{x\to +\infty} [1^+] = 1$$

(در بی‌نهایت و در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۱ تا ۶۴)

www.mapedu.ir

۷۳- گزینهٔ «۳»

(سهیل حسن‌زاده‌پور)

با توجه به اینکه حد تابع در $x=\frac{1}{3}$ برابر ∞ شده است، پس $x=\frac{1}{3}$ ریشهٔ مخرج است.

$$\frac{1}{9}d+3\times\frac{1}{3}-1=0\Rightarrow d=0$$

حال با توجه به اینکه حد $f(x)$ در $-\infty$ برابر ۳ شده است، پس عبارت پرتوان صورت و مخرج (بدون درنظر گرفتن ضریب) باید با هم یکسان باشند پس ضریب x^2 و x^2 در صورت باید صفر شوند.

$$a-1=0\Rightarrow a=1$$
$$b+2=0\Rightarrow b=-2$$

حال داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=3\to\lim_{x\to-\infty}\frac{c|x|-2}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{c|x|}{3x}$$
$$=\frac{-cx}{3x}=\frac{-c}{3}=3\Rightarrow c=-9$$
$$\Rightarrow\frac{c+d}{b-a}=\frac{-9+0}{-2-1}=3$$

(در بی‌نهایت و در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۶۴)

۷۴- گزینهٔ «۳»

(بابک سادات)

نقطهٔ $(-1,3)$ در نمودار تابع f^{-1} صدق می‌کند در واقع f (بخشی از) تابع درجهٔ دوم بوده که رأس آن $(3,-1)$ است یعنی:

$$f(x)=(x-3)^2-1=x^2-6x+8;x\geq 3$$

نقطهٔ $(-2,1)$ در نمودار تابع g^{-1} صدق می‌کند در واقع $g(x)$ تابع درجهٔ سوم بوده که مرکز تقارن آن نقطه $(1,-2)$ است یعنی:

$$g(x)=(x-1)^3-2=x^3-3x^2+3x-3$$

حال برای محاسبهٔ حد در بی‌نهایت فقط با جملات پرتوان کار داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)-xf(x)}{f(x)+x\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3-3x^2+3x-3)-x(x^2-6x+8)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

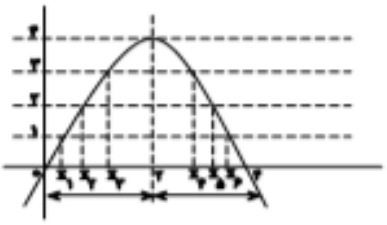
(در بی‌نهایت و در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۹ و ۵۱ تا ۶۴)

۷۵- گزینهٔ «۲»

(سعاد رادمنش)

می‌دانیم تابع جزء صحیح به ازای مقادیر صحیح داخل جزء صحیح حد ندارد لذا می‌توان تابع داخل جزء صحیح را رسم کرد.

به ازای $x=2$ عبارت داخل جزء صحیح، مقداری صحیح بوده و ماکزیمم است. لذا در این نقطه حد داریم ولی پیوسته نیست.



به ازای مقادیر $(x_1,x_2,\dots,x_6)$ مقدار داخل جزء صحیح عدد صحیح خواهد بود که حد ندارد. اما دقت کنید که به ازای عامل صفرشونده $x=1$، حاصل حد چپ و راست تابع f در $x=1$ برابر صفر خواهد بود بنابراین تابع در $x=1$ (همان x_4) حد دارد. در نتیجه تابع f در بازهٔ $(0,4)$ در ۵ نقطه حد ندارد.

(در و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۳۶)

۷۶- گزینهٔ «۱»

(بهمن کریم‌زاده)

$$\lim_{x\to0}\frac{x+a}{x^2-x}-\frac{x+b}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{x+a}{x(x-1)}-\frac{x+b}{x(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+a)(x+1)-(x+b)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{2x+ax-bx+a+b}{x(x-1)(x+1)}$$

با توجه به اینکه حاصل حد برابر b، مقداری صحیح می‌باشد، بنابراین از آن‌جایی‌که مقدار مخرج در $x=0$ برابر صفر است، مقدار صورت نیز در $x=0$ برابر صفر است:

$$2x+ax-bx+a+b=2(0)+a(0)-b(0)+a+b=0$$
$$\Rightarrow a+b=0\Rightarrow a=-b\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{2x+ax-bx+a+b}{x(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-bx-bx-b+b}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x(2-2b)}{x(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2-2b}{(x-1)(x+1)}=\frac{2-2b}{-1}=b\Rightarrow 2-2b=-b\Rightarrow b=2$$
$$\Rightarrow a=-2$$
$$\Rightarrow b-a=2-(-2)=4$$

(ترکیبی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۳۶) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۵ تا ۶۳)

۷۷- گزینهٔ «۱» (اسد جواز نظری)

با توجه به $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$، عبارت x^2-2x باید به سمت $(-1)^+$ میل کند پس به کمک نمودار آن می‌توان نتیجه گرفت که اگر $x\to 1$ میل کند، x^2-2x به سمت $(-1)^+$ میل خواهد کرد، پس:

$$\lim f(x)=2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1} f(x^2-2x)=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{\sqrt{x^2+3x}-bx}=2$$

در حد فوق، صورت کسر به سمت صفر میل می‌کند بنابراین مخرج کسر نیز باید به سمت صفر میل کند تا پس از رفع ابهام $\frac{0}{0}$، حاصل حد برابر عدد حقیقی ۲ شود، پس:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+3x}-bx=0 \Rightarrow 2-b=0 \Rightarrow b=2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{\sqrt{x^2+3x}-2x}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{\sqrt{x^2+3x}-2x}$$

$$\times\frac{\sqrt{x^2+3x}+2x}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)(\sqrt{x^2+3x}+2x)}{(x^2+3x)-4x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{4a(x-1)}{-3x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{4a}{-3x}=2 \Rightarrow \frac{4a}{-3}=2 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

بنابراین حاصل $a-b$ برابر است با:

$$a-b=-\frac{3}{2}-2=-\frac{7}{2}$$

(نگارش) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۶) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۳)

۷۸- گزینهٔ «۲» (رضا علی نواز)

$$f(x)=3-\sqrt{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x)=x^2-6x+8 \Rightarrow f^{-1}(2)=0$$

چون ریشهٔ مخرج است و از طرفی حاصل حد تعریف شده است، در این‌صورت حد، ابهام $\frac{0}{0}$ را داشته و باید ریشه مضاعف عبارت x^2+bx+c باشد:

$$\Rightarrow x^2+bx+c=(x-2)^2=x^2-4x+4 \Rightarrow b=-4, c=4$$

حال با رفع ابهام حدّ $\frac{0}{0}$ می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{(x-2)(x-4)}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{1}{2} \Rightarrow (b-c)k=(-8)\times(\frac{1}{2})=-4$$

(بی نهایت و در بی نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹ و ۵۵ تا ۵۳)

۷۹- گزینهٔ «۱» (بهمن کیوان‌راد)

محاسبهٔ حد چپ:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x[x]+x[-x]}{\sqrt{x+9}-3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{\sqrt{x+9}-3}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{\sqrt{x+9}-3}\times\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{-x(\sqrt{x+9}+3)}{x}=-6$$

محاسبهٔ حد راست:

$$\lim_{x\to 0^+} a\sin(\frac{\pi a(x+3)}{6})-3=a\sin(\frac{\pi a}{2})-3$$

با توجه به شرط پیوستگی، حد چپ و راست در $x=0$ باید برابر باشند.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow a\sin(\frac{\pi a}{2})-3=-6$$

$$\Rightarrow a\sin(\frac{\pi a}{2})=-3 \Rightarrow \sin(\frac{\pi a}{2})=\frac{-3}{a}$$

حال می‌توان از گزینه‌ها استفاده کرد و از آن‌جایی‌که صورت سوال مقدار $\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}$ را می‌خواهد، در ابتدا از مقدار گزینه‌ها یک واحد کم کرده و سپس معکوس می‌کنیم تا مقدار a مشخص گردد. تساوی مشخص شده به ازای $a=3$ برقرار است. $1+\frac{1}{a}=\frac{4}{3} \to a=3 \Rightarrow \sin(\frac{3\pi}{2})=\frac{-3}{3}=-1$

(نگارش) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۴۲) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۳)

۸۰- گزینهٔ «۱» (مصطفی سلطانی‌نسب)

$$R=f(-2)=-8+8+6+a=a+6$$

$$f(x)=(x+2)g(x)+(a+6)\ ,\ f(-1)=g(-1) \quad (1)$$

پس:

$$f(-1)=(-1+2)g(-1)+a+6 \Rightarrow f(-1)=g(-1)+a+6 \xrightarrow{(1)} a+6=0$$

$$\Rightarrow a=-6 \to f(\frac{a}{3})=f(-2)=-8+8+6-6=0$$

(بی نهایت و در بی نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۰ و ۵۵)

۸۱- گزینهٔ «۳» (منوچهر اسفندیار)

چون تابع g اکیداً نزولی و پیوسته است و محور x را در نقطهٔ $(5,0)$ قطع می‌کند، یعنی اگر $x\to 5^+$، $g(x)\to 0^-$ و اگر $x\to 5^-$ آنگاه $g(x)\to 0^+$ است.

$$x\to 4^+ \Rightarrow f(4^+)=\frac{4^2-12}{g(\sqrt{4^+}+3)}=\frac{4}{g(5^+)}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$x\to 4^- \Rightarrow f(4^-)=\frac{4^2-12}{g(\sqrt{4^-}+3)}=\frac{-3}{g(5^-)}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

(بی نهایت و در بی نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۲)

www.mapedu.ir

۸۲- گزینهٔ «۳» (سید اصغر زمانی)

مبهم: $\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}=\frac{2x^2-2x^2}{x^2-x^2}=\frac{2x^2-\sqrt{4x^4}}{x^2-\sqrt{x^4}}$ ← پرتوان

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2\sqrt{x^4+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}}}{x^2-\sqrt{(x^2-1)^2+(-1)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2\sqrt{(x^2+\frac{1}{8})^2+(-\frac{17}{64})}}{x^2-\sqrt{(x^2-1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2|x^2+\frac{1}{8}|}{x^2-|x^2-1|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x^2-\frac{1}{4}}{x^2-x^2+1}=-\frac{1}{4}$$

(در بی نهایت و در بی نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۸۳- گزینهٔ «۴» (بهزاد مقدمی)

با توجه به نمودار تابع $f(x)$ داریم:

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^-}f(x)=+\infty$$

در نتیجه با توجه به $+\infty$ و $\lim_{x\to(-b)^+}f(1-x)$ باید داشته باشیم:

$$1-x\to2^+\Rightarrow1-x>2\Rightarrow x<-1\Rightarrow x\to-1^-$$

$$1-x\to-2^-\Rightarrow1-x<-2\Rightarrow x>3\Rightarrow x\to3^+$$

بنابراین $x\to(-b)^+$ همان $x\to3^+$ است و در نتیجه: $b=-3$.

از طرفی داریم: (با توجه به تکیه داشتن بزرگترین توان‌ها) $(\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+1}=|\sqrt{a}x|)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-|\sqrt{a}\times x|}{bx}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{(1-\sqrt{a})x}{bx}=\frac{1}{6}\xrightarrow{b=-3}$$

$$\Rightarrow1-\sqrt{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow36a=36\times\frac{9}{4}=81$$

(در بی نهایت و در بی نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

اختلال وسواس فکری

۱ - مجموعه $(x^2-\frac{1}{4},x+3)\cup(x-2,1-2x)$ یک همسایگی محذوف برای عدد a است. a چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳- صفحه ۵۳ و ۵۴- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

همسایگی:

هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر $x_0\in(a,b)$ آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 می‌باشد.

همسایگی محذوف:

اگر بازهٔ (a,b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $(a,b)-\{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می‌شود.

برای اینکه بازهٔ $(x^2-\frac{1}{4},x+3)\cup(x-2,1-2x)$ یک همسایگی محذوف a باشد، یا باید $x+3=x-2$ شود که غیرممکن است و یا:

$$x^2-\frac{1}{4}=1-2x\rightarrow x^2+2x-\frac{5}{4}=0\rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+5}}{2}$$

$$\rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\rightarrow(0,\frac{7}{2})\cup(-\frac{3}{2},0)\rightarrow a=0\ \checkmark\\ x=-\frac{5}{2}\rightarrow(6,\frac{1}{2})\cup(-\frac{9}{2},6)\rightarrow \text{غ ق ق}\end{cases}$$

دقت داشته باشید بازهٔ $(6,\frac{1}{2})$ وجود ندارد.

سوالات منتخب

به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر x، بازهٔ $(x+1,2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟ (سراسری ریاضی ۹۸)

۱) $\varnothing$ ✓ ۲) $\{2\}$ ۳) $2<x<2/5$ ۴) $1/5<x<2$

گروه آموزشی ماز

۲ - باقیماندهٔ تقسیم $P(x)=2x^3+3x^2+ax+4$ بر $x+2$ برابر ۳ و خارج‌قسمت آن $Q(x)$ است. باقیماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳- صفحه ۵۰ و ۵۱- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ اگر خارج‌قسمت $Q(x)$ و باقیمانده R باشد، برای به دست آوردن R کافیست $P(a)$ را به دست آوریم:

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R$$
$$\rightarrow P(a)=R$$

$$P(x)=2x^3+3x^2+ax+4=(x+2)Q(x)+3$$

$$P(-2)=-16+12-2a+4=3\rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

باقیماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-1$ همان $Q(1)$ است. بنابراین در معادلهٔ فوق x را برابر ۱ قرار می‌دهیم.

$$P(1)=2+3+a+4=3Q(1)+3\rightarrow Q(1)=\frac{a+6}{3}=\frac{-\frac{3}{2}+6}{3}=\frac{3}{2}$$

سوالات منتخب

اگر باقیماندهٔ تقسیم $P(x)=-x^3-ax^2+2x+b-1$ بر $x-2$ برابر ۲ باشد، باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۶ ۴) ۱۰- ✓

۳ - با توجه به نمودار $f(x)$ حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f\left(-2f\left(x^2+1\right)\right)-\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(f\left(1-x^2\right)\right)$

۱) ۱-
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲- صفحه ۱۲۳ و ۱۲۷- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

فرض کنید تابع f در بازه‌ای مانند (a,x_0) تعریف شده باشد، حد چپ f در x_0 برابر عدد l است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$

به طریق مشابه فرض کنیم f در بازه‌ای مانند (x_0,b) تعریف شده باشد، حد راست f در x_0 برابر عدد l است، هرگاه مقادیر تابع f را به اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a,b) شامل نقطهٔ x_0 (به جز احتمالاً در خود x_0) تعریف شده باشد. حد تابع f در x_0 برابر عدد l است، هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x (از دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

عبارت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ را به اختصار به صورت $f(a^+)$ بیان می‌کنیم.

$$\lim_{x\to(-1)^-} f\left(-2f(x^2+1)\right)-\lim_{x\to 1^-} f\left(f(1-x^2)\right)=f\left(-2f(2^+)\right)-f\left(f(-^+)\right)$$

$$=f\left(-2(-^-)\right)-f(2)$$

$$=f(-^+)-f(2)=2-1=1$$

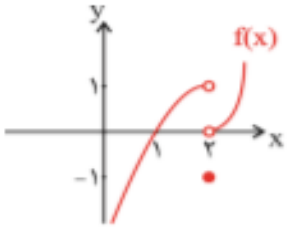
سوالات منتخب

با توجه به نمودار تابع $f(x)$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} f(\frac{1}{x})-\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x^2)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱-
۴) ۲ ✓

گروه آموزشی ماز

۴ - با توجه به نمودار $f(x)$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{[f(x)]}{x^2-4x+4}$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است)



۱) صفر
۲) عددی مثبت
۳) عددی منفی
۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲- صفحه ۱۲۳ و ۱۲۷- ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ، x به a بسیار نزدیک می‌شود اما $x\neq a$ می‌باشد.

مخرج کسر همان عبارت $(x-2)^2$ است. بنابراین وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود $(x \neq 2)$ عبارت $(x-2)^2$ به صفر نزدیک شده اما صفر نمی‌شود $(x \neq 2)$. بنابراین مخرج کسر صفر نیست.

از طرفی با توجه به شکل، وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود $f(x)$ در سمت راست ۲ با مقادیر مثبت به صفر و در سمت چپ ۲ با مقادیر کمتر از یک، به ۱ نزدیک می‌شود که در هر دو حالت $[f(x)]$ برابر صفر می‌باشد.

در نتیجه صورت کسر $\frac{[f(x)]}{x^2-4x+4}$ صفر و مخرج مخالف صفر است. بنابراین حاصل حد برابر صفر است.

سوالات منتخب

حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\frac{[x^2-6x+9]}{(x+1)(x-3)^2}$ کدام است؟

۱) صفر ✓ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) وجود ندارد.

www.biomaze.ir

۵ - تابع $f(x)=\left[\frac{x-2}{x}\right]+|2x|$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+} f(x)=a$ و $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^-} f(x)=b$ باشد، حاصل a^2-b^2 کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) ۹ ۲) ۹- ۳) ۱۱- ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲، صفحه ۱۳۴، متوسط)

با توجه به اینکه x در همسایگی $-\frac{1}{2}$ قرار دارد $2x$ منفی است و $|2x|$ برابر با $-2x$ می‌باشد.

$$f(x)=\left[\frac{x-2}{x}\right]+|2x|=\left[1-\frac{2}{x}\right]-2x=\left[\frac{-2}{x}\right]+1-2x$$

حد چپ و راست $1-2x$ در $x=-\frac{1}{2}$ برابر با ۲ می‌باشد. حال به بررسی حد چپ و راست $\left[\frac{-2}{x}\right]$ می‌پردازیم.

$$x>-\frac{1}{2}\to\frac{1}{x}<-2\to\frac{-2}{x}>4\to\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\left[-\frac{2}{x}\right]=[4^+]=4\to a=4+2=6$$

$$x<-\frac{1}{2}\to\frac{1}{x}>-2\to-\frac{2}{x}<4\to\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\left[-\frac{2}{x}\right]=[4^-]=3\to b=3+2=5$$

$$a^2-b^2=36-25=11$$

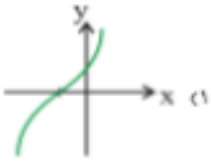
سوالات منتخب

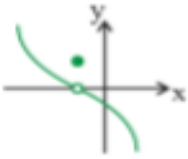
مجموع حد راست و چپ تابع $y=[x]+[2x]$ وقتی $x\to-\frac{1}{2}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.) (آزاد ۸۷ تجربی)

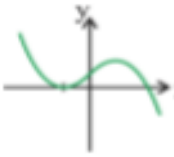
۱) ۴- ۲) ۶- ۳) ۵- ✓ ۴) ۳-

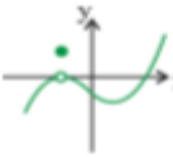
گروه آموزشی ماز

۶ - اگر $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{f(x)}=a$ و $a<0$ باشد، نمودار $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

www.mapedu.ir

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲- صفحه ۱۳۵- متوسط)

هر تست ما ز یک کلاس درس!

در حالت کلی مقدار حد تابع در یک نقطه به مقدار آن تابع در آن نقطه ارتباطی ندارد.

به عنوان مثال اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ باشد، $f(a)$ می‌تواند مثبت، منفی، صفر و یا تعریف نشده باشد.

حاصل $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{f(x)}$ برابر با a که عددی منفی است می‌باشد. پس نتیجه می‌شود که عبارات x^2-1 و $f(x)$ در دو طرف $x=-1$ مختلف‌العلامه هستند. با توجه به جدول تعیین علامت x^2-1 در همسایگی $x=-1$

x		-1	
x^2-1	$+$	0	$-$

جدول تعیین علامت $f(x)$ در همسایگی $x=-1$ باید به صورت

x		-1	
$f(x)$	$-$		$+$

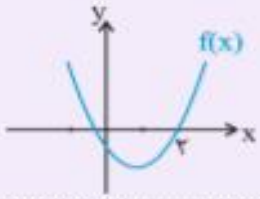
باشد.

بنابراین گزینهٔ ۱ می‌تواند نمودار $f(x)$ باشد.

دقت داشته باشید $f(-1)$ تاثیری در مساله فوق ندارد.

سوالات منتخب

با توجه به نمودار سهمی $f(x)$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2}$ کدام است؟



۱) عددی مثبت ✓ ۲) عددی منفی

۳) صفر ۴) وجود ندارد.

www.biomaze.ir

۷ - اگر $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-kx^2}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{k}}$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳- صفحه ۵۲ و ۵۳- متوسط)

هر تست ما ز یک کلاس درس!

در حد توابعی مانند $\frac{f}{g}$ که حد صورت و حد مخرج کسر در نقطه a، هر دو برابر صفر است، نمی‌توانیم از قضیه حد خارج‌قسمت استفاده کنیم، بنابراین سعی می‌کنیم با تجزیهٔ صورت و مخرج کسر به عامل‌های مناسب، کسر را ساده نماییم. برای این امر از اتحادهای جبری و مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

واضح است که حاصل حد عبارت سمت چپ به صورت مبهم $(\frac{0}{0})$ می‌باشد. برای رفع ابهام، مزدوج عبارت زیر رادیکال را ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-kx^2}}}{x} \times \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-kx^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-kx^2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-(1-kx^2)}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-kx^2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{kx^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-kx^2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{k}\,|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-kx^2}}} \xrightarrow{(x>0)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{k}\,\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\sqrt{1-kx^2}}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \to k=\sqrt{2}$$

سوالات منتخب

حاصل $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}$ کدام است؟ (تاریخ ۹۷ تجربی)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ✓ ۴) ۲۴

www.mapedu.ir

۸ - حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^+}\dfrac{4x+\sqrt{2x-1}-2}{x^2-\sqrt[3]{1-2x}-\frac{1}{4}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳- صفحه ۵۲ و ۵۳- دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در حالتی که $u\to 0$، عبارت $a_1u^n+a_2u^{n-1}+\dots+a_ku^m$ با a_ku^m هم‌ارز است. به عبارتی می‌توان از بقیهٔ جملات صرف‌نظر کرد. (قضیهٔ کم توان)

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+4x^2-7x}{x^4-x^3+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-7x}{2x}=-\frac{7}{2}$$

روش اول: برای ساده شدن عبارت، فرض می‌کنیم: $x-\frac{1}{2}=k\to x=k+\frac{1}{2}$ در نتیجه $x\to(\frac{1}{2})^+\Rightarrow k\to 0^+$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{4x+\sqrt{2x-1}-2}{x^2-\sqrt[3]{1-2x}-\frac{1}{4}}=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{4(x-\frac{1}{2})+\sqrt{2(x-\frac{1}{2})}}{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})-\sqrt[3]{-2(x-\frac{1}{2})}}$$

$$\lim_{k\to 0^+}\frac{4k+\sqrt{2k}}{k(k+1)-\sqrt[3]{-2k}}=\lim_{k\to 0^+}\frac{\sqrt{k}(4\sqrt{k}+\sqrt{2})}{\sqrt[3]{k}(\sqrt[3]{k^2}(k+1)+\sqrt[3]{2})}=\lim_{k\to 0^+}\frac{\sqrt[6]{k}(4\sqrt{k}+\sqrt{2})}{\sqrt[3]{k^2}(k+1)+\sqrt[3]{2}}=\frac{0\times\sqrt{2}}{0+\sqrt[3]{2}}=0$$

روش دوم:

$$\lim_{k\to 0^+}\frac{4k+\sqrt{2k}}{k(k+1)-\sqrt[3]{-2k}}\xrightarrow{\text{قضیه کم توان}}\lim_{k\to 0^+}\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt[3]{2k}}=\lim_{k\to 0^+}\sqrt[6]{2k}=0$$

سوالات منتخب

حد کسر $\dfrac{x+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$ وقتی $x\to 1^+$ کدام است؟ (آزاد ۸۷ تجربی)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) صفر ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

www.biomaze.ir

۹ - حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+}\dfrac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲- صفحه ۱۳۴ و ۱۳۵ - متوسط)

یادآوری: $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\cos 2x}=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+}\frac{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+}\frac{|\sin x+\cos x|}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+}\frac{-\cancel{(\sin x+\cos x)}}{(\cos x-\sin x)\cancel{(\sin x+\cos x)}}=\frac{-1}{-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

www.mapedu.ir

دقت داشته باشید وقتی $x \to (\frac{\pi}{4})^+$:

$$\begin{matrix} \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \Rightarrow \sin x + \cos x < 0 \to |\sin x + \cos x| = -(\sin x + \cos x)$$

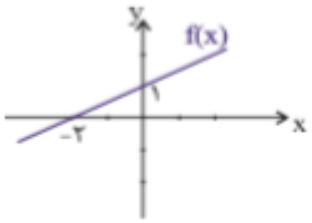
سوالات منتخب

حد تابع $\frac{1-|\cos x|}{|\sin x|\sin x}$ وقتی $x \to 0^-$ برابر است با: (آزاد ۸۱ ریاضی)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $-\frac{1}{2}$ ✓

گروه آموزشی ماز

۱۰ - با توجه به نمودار تابع $f(x)$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f^{-1}(2\sqrt{x})-2}{f(4x)-3}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۲

۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲- صفحه ۱۳۱ تا ۱۳۳- متوسط)

یادآوری: معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

تابع خطی $f(x)$ از نقاط $(0,1)$ و $(-2,0)$ می‌گذرد. بنابراین ضابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{1-0}{0+2}(x+2) \to f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

$$\to \frac{x}{2} = f(x) - 1 \to x = 2f(x) - 2 \to f^{-1}(x) = 2x - 2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f^{-1}(2\sqrt{x})-2}{f(4x)-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(4\sqrt{x}-2)-2}{(2x+1)-3} = \lim_{x\to 1} \frac{4\sqrt{x}-4}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{4(\sqrt{x}-1)}{2(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{\sqrt{x}+1} = 1$$

سوالات منتخب

حاصل $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}$ کدام است؟ (سراسری ۹۷ تجربی)

۱) -112 ✓ ۲) -96 ۳) -84 ۴) -72

www.biomaze.ir

۱۱ - حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) $-\frac{1}{2}$

www.mapedu.ir

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳- صفحه ۵۲ و ۵۳- متوسط)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{|\sqrt{x}-1|}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{-(\sqrt{x}-1)}\times\frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1})}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)(x-2)}{-\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1})}=\frac{2\times(-1)}{-(2+2)}=\frac{1}{2}$$

سوالات منتخب

حاصل $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}$ کدام است؟ (تاریخ ۹۷ تجربی)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ✓ ۴) ۲۴

گروه آموزشی ماز

۱۲- تابع $f(x)=([x]-a)[x]$ تنها در یک نقطه از بازهٔ $(-\frac{1}{2},\frac{5}{3})$ ناپیوسته است، مجموع مقادیر متمایز برای a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲- صفحه ۱۳۹ و ۱۴۰- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) تعریف پیوستگی

گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

۲) تابع $y=[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است.

می‌دانیم تابع $y=[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است. بازهٔ $(-\frac{1}{2},\frac{5}{3})$ شامل اعداد صحیح ۰ و ۱ می‌باشد. بنابراین تابع $f(x)$ باید در یکی از نقاط ۰ یا ۱ پیوسته باشد.

۱) در $x=0$ پیوسته باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+}f(x)=(0-a)\times 0=0\\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=(-1-a)\times(-1)=a+1\\ f(0)=(0-a)\times 0=0\end{array}\right\}\Rightarrow a+1=0\Rightarrow a=-1$$

۲) در $x=1$ پیوسته باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^+}f(x)=(1-a)\times 1=1-a\\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=(0-a)\times 0=0\\ f(1)=(1-a)\times 1=1-a\end{array}\right\}\Rightarrow 1-a=0\to a=1$$

بنابراین مجموع مقادیر متمایز برای a برابر است با: $1+(-1)=0$

سوالات منتخب

تابع f با ضابطه $f(x)=(x-3)\left[\frac{1}{3}x-1\right]$ روی بازه $(0,9)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.) (سراسری ۸۵ ریاضی)

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳ - اگر $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1-2\sin^2 2x}{ax^2+bx-1}=-\infty$ باشد، آن‌گاه حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) مقداری برای a و b وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳- صفحه ۵۵ تا ۵۷- دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) تعریف

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a، تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم مقدارهای $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

۲) اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ و یا $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ باشد، نتیجه می‌شود که $x=a$ ریشهٔ مضاعف $f(x)$ می‌باشد.

می‌دانیم $1-2\sin^2 2x=\cos 4x$، بنابراین مقدار صورت کسر به ازای $x=\frac{1}{2}$ برابر $\cos 2$ می‌باشد. انتهای کمان ۲ رادیان در ناحیهٔ دوم مثلثاتی است، بنابراین $\cos 2$ عددی است منفی.

مقدار حد تابع چه در سمت چپ و چه سمت راست $\frac{1}{2}$ برابر $-\infty$ شده است. در نتیجه $x=\frac{1}{2}$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است. بنابراین:

$$ax^2+bx-1=a(x-\tfrac{1}{2})^2 \to ax^2+bx-1=ax^2-ax+\frac{a}{4}$$

$$\to \begin{cases} b=-a \\ -1=\frac{a}{4} \end{cases} \to a=-4,\ b=4$$

به نظر می‌رسد که گزینه ۳ درست باشد اما دقت داشته باشید $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos 2}{-4(x-\frac{1}{2})^2}=\frac{\cos 2}{0^-}=+\infty$ و هیچگاه برابر $-\infty$ نمی‌شود.

سوالات منتخب

اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-5}{x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۸)

۱) ۱- ۲) صفر ✓ ۳) ۱ ۴) ۲

www.biomaze.ir

۱۴- اگر $f(2x-\frac{\pi}{6})=\frac{\tan(x+\frac{\pi}{6})}{2[x]-3}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

www.mapedu.ir

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳- صفحه ۵۷- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

قضیه: فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ در این صورت:

الف) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ما در واقع می‌خواهیم $f(\frac{\pi}{2}^+)$ را محاسبه کنیم. در عبارت $f(2x-\frac{\pi}{6})$ کافیست $2x-\frac{\pi}{6}$ را برابر $\frac{\pi}{2}$ قرار دهیم:

$$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2} \rightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(2x-\frac{\pi}{6})$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(2x-\frac{\pi}{6}) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{\tan(x+\frac{\pi}{6})}{2[x]-3} = \frac{\tan(\frac{\pi}{2}^+)}{2-3} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

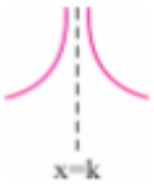
سوالات منتخب

حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\tan\frac{x}{2}}{1-\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$ ✓

گروه آموزشی ماز

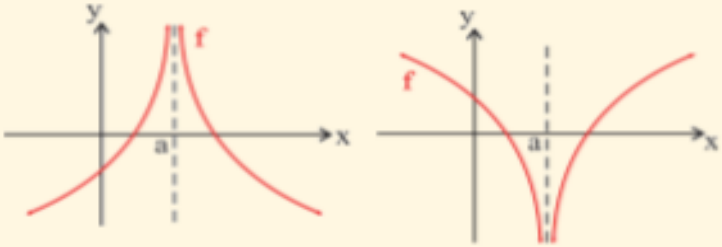
۱۵- به ازای چند مقدار a نمودار تابع $f(x)=\frac{x+a}{x^2-2ax+2a+3}$ در اطراف نقطهٔ $x=k$ به صورت مقابل است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳- صفحه ۵۴ - دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

اگر نمودار تابع $y=\frac{1}{g(x)}$ به یکی از صورتهای فوق باشد بدان معناست که $x=a$ ریشهٔ مضاعف $g(x)$ است.

با توجه به نمودار درمی‌یابیم که $x=k$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است. از طرفی ریشهٔ مضاعف ax^2+bx+c برابر $x=-\frac{b}{2a}$ می‌باشد. در نتیجه:

$$x=k=-\frac{(-2a)}{2} \Rightarrow x=k=a$$

$$x^2-2ax+2a+3=0 \xrightarrow{x=a} a^2-2a^2+2a+3=0 \to a^2-2a-3=0$$

$$\to \begin{cases} a=-1 \to \lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{(x+1)^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty \text{ غ‌ق‌ق} \\ a=3 \to \lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2-6x+9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{(x-3)^2}=\frac{6}{0^+}=+\infty \checkmark \end{cases}$$

بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای a، برابر ۳ است.

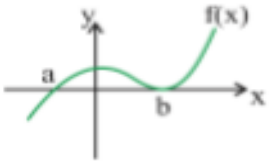
سوالات منتخب

اگر $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-4}{2x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟ (سراسری ۹۳ ریاضی)

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۶ ✓ ۴) ۱۲

www.biomaze.ir

۱۶ - با توجه به نمودار $f(x)$، نمودار تابع $g(x)=\frac{2x}{f(x)}$ در اطراف نقطهٔ موردنظر چگونه است؟



۱)

۲)

۳)

۴)

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳- صفحه ۵۵ و ۵۶ - متوسط)

$$\lim_{x\to a^+} g(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{2a}{f(x)}=\frac{2a}{0^+}\xrightarrow{(a<0)}-\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} g(x)=\lim_{x\to a^-}\frac{2a}{f(x)}=\frac{2a}{0^-}\xrightarrow{(a<0)}+\infty$$

بنابراین گزینهٔ ۱ نادرست و گزینهٔ ۴ درست است.

www.mapedu.ir

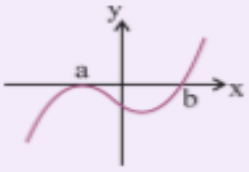
$$\lim_{x\to b} g(x) = \lim_{x\to b}\frac{2b}{f(x)} = \frac{2b}{0^+} \xrightarrow{(b>0)} +\infty$$

بنابراین نمودار $g(x)$ در اطراف b به صورت مقابل است.

و گزینه‌های ۲ و ۳ نادرست هستند.

سوالات منتخب

با توجه به نمودار تابع $f(x)$، رفتار تابع $g(x)=\frac{x}{f(x)}$، در اطراف نقطه موردنظر چگونه است ؟



۱)

۲)

۳)

۴)

گروه آموزشی ماز

۱۷- حاصل کدام‌یک از حدود زیر درست نمی‌باشد؟

۱) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1+\sqrt{1-x}}{x-2} = 2$

۲) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^3-1}}{2x^2} = \frac{1}{2}$

۳) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x^3}} = -1$

۴) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x-1)^2} = 6$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳- صفحه ۶۱ تا ۶۳- ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، رابطهٔ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

۲) قضیه پر توان

$$\lim_{x\to\infty} ax^n+bx^{n-1}+\ldots = \lim_{x\to\infty} ax^n$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\ldots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\ldots} \to \begin{cases} n>m \Rightarrow \infty \\ n=m \Rightarrow \frac{a}{a'} \\ n<m \Rightarrow 0 \end{cases} \quad , (m,n\in\mathbb{N})$$

بررسی گزینه‌ها

در گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع برابر با $(-\infty,1]$ می‌باشد. بنابراین x نمی‌تواند به $+\infty$ میل کند و چنین حدی موجود نیست.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^3-1}}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

گزینهٔ ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-\sqrt{x^3}} = -0$$

گزینهٔ ۴ صحیح است.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2+2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2}{x^2} = 6$$

سوالات منتخب

حد تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^3+3x^2+1}-\sqrt{x^3-x^2+1}}{\sqrt{2x+1}}$ وقتی $x\to+\infty$ کدام است؟ (آزاد ۸۶ ریاضی)

۱) $\sqrt{2}$ ✓ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۸ - اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax^n+2x^3+1}{2x^m+x+5}=3$ باشد، مقدار $a+m$ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟ $(m,n\in\mathbb{N})$

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳، صفحه ۶۳، متوسط)

با توجه به اینکه حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax^n+2x^3+1}{2x^m+x+5}$ برابر با عدد حقیقی ۳ شده است مشخص می‌شود که صورت و مخرج کسر، درجهٔ یکسانی دارند.

حالت اول: $n>3\to m=n>3\to \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{2x^m}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{2x^n}=\frac{a}{2}=3\to a=6$

گزینهٔ ۳ و ۴ درست هستند $\to a+m>9$

حالت دوم: $n=3\to m=n=3\to \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax^3+2x^3}{2x^3}=\frac{a+2}{2}=3\to a=4\to a+m=7$

گزینهٔ ۱ درست است.

حالت سوم: $n<3\to m=3\to \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{2x^m}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{2x^3}=1$ غ‌ق‌ق

سوالات منتخب

حد کسر $\frac{x^{m+3}+mx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}$ با شرط $n>3$، وقتی $x\to\infty$ برابر ۲- است. $m+n$ کدام است؟ (سراسری ۸۴ تجربی)

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ✓ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

www.biomaze.ir

۱۹ - بزرگترین بازه‌ای که تابع $y=f(x)$ در آن پیوسته است به صورت (a,b) می‌باشد. ضابطهٔ $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $y=[x]$ ۲) $y=[x^2]$ ۳) $y=[-x]$ ۴) $y=\left[-\frac{1}{x}\right]$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲، صفحه ۱۴۰ و ۱۴۱ - ساده)

هر تست مار یک کلاس درس

تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.

تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است، هرگاه در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوسته راست و در نقطه b پیوسته چپ باشد.

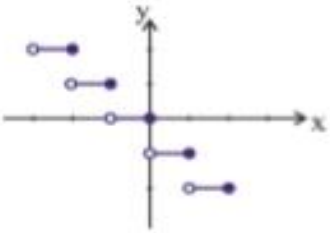
بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: تابع $y=[x]$ در بازه‌های $[k,k+1)$ پیوسته است. $(k\in\mathbb{Z})$

گزینه ۲: بزرگترین بازه‌ای که تابع $y=[x^2]$ در آن پیوسته است بازهٔ $(-1,1)$ می‌باشد.

گزینه ۴: بزرگترین بازه‌ای که تابع $y=\left[\frac{-1}{x}\right]$ در آن پیوسته است بازهٔ $[1,+\infty)$ می‌باشد.

گزینه ۳: با توجه به نمودار $y=[-x]$ واضح است که این تابع در بازهٔ $(k,k+1]$ پیوسته است. $(k\in\mathbb{Z})$



www.mapedu.ir

سوالات منتخب

فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & , |x-1|<1\\ x^2+ax+b & , |x-1|\geq 1\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۹)

۱) $-\frac{3}{2}$ ✓ ۲) -1 ۳) 1 ۴) $\frac{5}{2}$

گروه آموزشی ماز

۲۰ - اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x-\frac{1}{x}}{x+2}+ax+b=a+5$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟ $(a,b\in\mathbb{R})$

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) -1

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- صفحه ۶۳ و ۶۴- متوسط)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x-\frac{1}{x}}{x+2}+ax+b=a+5\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x-\frac{1}{x}+ax^3+2ax+bx+2b}{x+2}=a+5$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{(a+1)x^3+(2a+b+3)x+2b-\frac{1}{x}}{x+2}=a+5$$

چون حاصل حد یک عدد حقیقی است، بنابراین درجهٔ صورت و مخرج برابر است. درجهٔ مخرج کسر، یک می‌باشد، در نتیجه ضریب x^3 در صورت باید صفر باشد.

$$a+1=0\to a=-1\xrightarrow{\text{قضیه پرتوان}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(2a+b+3)\cancel{x}}{\cancel{x}}=a+5\to b+1=4\to b=3$$

$$\Rightarrow a+b=2$$

دقت کنید $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ برابر صفر است و در حد تابع تاثیری ندارد.

سوالات منتخب

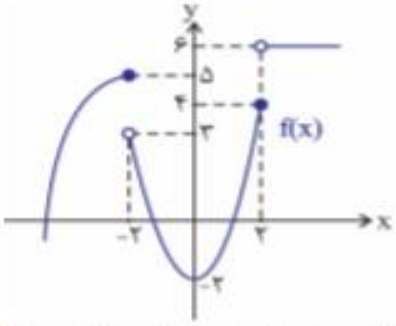
تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{4x^n-6x^2+1}{ax^3+7x^2-2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۹)

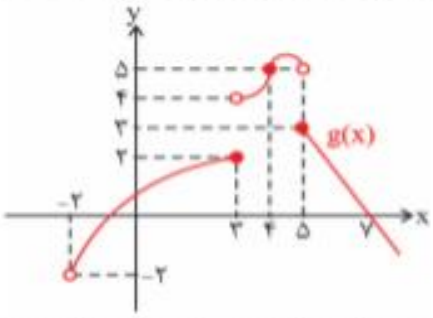
۱) $-\frac{4}{17}$ ۲) $-\frac{6}{17}$ ✓ ۳) $-\frac{5}{12}$ ۴) $-\frac{6}{11}$

www.biomaze.ir

www.mapedu.ir

۲۱ ـ نمودار دو تابع f و g به‌صورت مقابل است. حاصل چه تعداد از حدهای زیر به درستی محاسبه شده است؟





الف) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}(gof)(x)=2$

ب) $\lim\limits_{x\to5^+}(fog)(x)=6$

پ) $\lim\limits_{x\to2^-}g(f(4-x))=3$

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

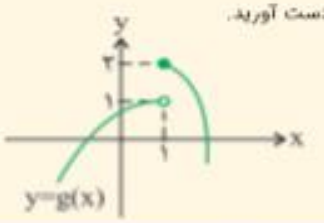
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۲۰ تا ۱۳۶ ـ متوسط)

هر تست ما، یک کلاس درس!

برای محاسبه حد تابع $y=f(g(x))$ در نقطهٔ $x=a$ ابتدا حد تابع درونی (g) را در این نقطه محاسبه کرده و اگر عددی مانند L حاصل حد تابع g باشد با مشخص کردن کمتر یا بیشتر بودن L به سراغ محاسبهٔ حد تابع بیرونی (f) در نقطهٔ $x=L$ می‌پردازیم.

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}2x & ; \ x\geq2\\ 3x-1 & ; \ x<2\end{cases}$ و نمودار تابع $g(x)$ به‌صورت مقابل باشد حاصل $\lim\limits_{x\to1^+}f(g(x))$ را به‌دست آورید.



با توجه به این که نمودار تابع g در سمت راست $x=1$ از پایین به ۲ نزدیک می‌شود پس داریم:

$$\lim_{x\to1^+}f(g(x))=\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}3x-1=3(2)-1=5$$

برای محاسبهٔ هر یک از حدهای داده شده با توجه به نمودار داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}g(f(x))=\lim\limits_{x\to2^-}g(x)=2$

ب) $\lim\limits_{x\to5^+}f(g(x))=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=6$

پ) $\lim\limits_{x\to1^+}g(f(4-x))=\lim\limits_{x\to2^+}g(f(x))=g(6)=\frac{3}{2}$

دقت شود که با توجه به نمودار تابع $g(x)$، ضابطه تابع $g(x)$ برای $x\geq5$ به صورت $g(x)=-\frac{3}{2}(x-7)$ است، پس: $g(6)=\frac{3}{2}$

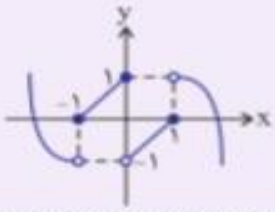
با توجه به مقادیر به‌دست آمده پاسخ قسمت‌های "الف" و "ب" به درستی محاسبه شده‌اند.

سؤالات منتخب

۱. در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & ; \ x>0\\ -\sqrt{1+x} & ; \ x\leq0\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to0^-}f(x^3-x)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ✓ ۳) صفر ۴) موجود نیست

۲. اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to0^-}f([x]+1)+\lim\limits_{x\to0^+}f(x-1)$ کدام است؟



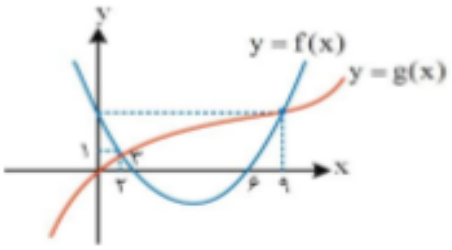
۱) صفر

۲) ۱ ✓

۳) -1

۴) -2

۲۲ - نمودار دو تابع f و g به‌صورت مقابل است. اگر $h(x)=\begin{cases}\dfrac{|f(x)-g(x)|}{f^{۲}(x)-g^{۲}(x)} & ; \quad f(x)>g(x)\\[2ex] \dfrac{|f(x)-g(x)|}{f(x)-g(x)} & ; \quad f(x)\le g(x)\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+} h(x)+\lim\limits_{x\to ۹^+} h(x)$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) $-\frac{۸}{۹}$

۴) $\frac{۸}{۹}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۲۰ تا ۱۳۶ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

برای محاسبهٔ حد توابع چند ضابطه‌ای باید با توجه به کمتر یا بیشتر بودن عددی که x به آن میل می‌کند ضابطهٔ مورد نظر را انتخاب کنیم و از آن حد بگیریم.

مثال: با توجه به تابع $f(x)=\begin{cases}۳x-[x] & x<۲\\ x+۲ & x\ge ۲\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)-\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)$ را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)-\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(x+۲)-\lim_{x\to ۳^-}\left(۳x-[x]\right)=۴-\underbrace{\left(۶-\left[۲^-\right]\right)}_{۵}=-۱$$

ابتدا در تابع h محدودهٔ x را در هر یک از ضابطه‌ها مشخص می‌کنیم:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{|f(x)-g(x)|}{f^{۲}(x)-g^{۲}(x)} & ; \quad f(x)>g(x)\Rightarrow x<۲ \text{ یا } x>۹\\[2ex] \dfrac{|f(x)-g(x)|}{f(x)-g(x)} & ; \quad f(x)\le g(x)\Rightarrow ۲\le x\le ۹\end{cases}$$

حال به سراغ محاسبهٔ حد خواسته شده می‌رویم:

$$\lim_{x\to ۳^-} h(x)+\lim_{x\to ۹^+} h(x)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\overbrace{|f(x)-g(x)|}^{(-)}}{f(x)-g(x)}+\lim_{x\to ۹^+}\frac{\overbrace{|f(x)-g(x)|}^{(+)}}{f^{۲}(x)-g^{۲}(x)}=$$

$$-\lim_{x\to ۳^-}\frac{-\left(f(x)-g(x)\right)}{f(x)-g(x)}+\lim_{x\to ۹^+}\frac{f(x)-g(x)}{\left(f(x)-g(x)\right)\left(f(x)+g(x)\right)}=-۱+\lim_{x\to ۹^+}\frac{۱}{f(x)+g(x)}=-۱+\frac{۱}{f(۹)+g(۹)}=-۱+\frac{۱}{۲f(۹)}$$

برای به‌دست آوردن $f(۹)$ باید ضابطهٔ تابع f را پیدا کنیم:

$$f(x)=a(x-۳)(x-۶)\xrightarrow{f(۲)=۱}۱=a(-۱)(-۴)\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۴}(x-۳)(x-۶)$$

$$\Rightarrow f(۹)=\frac{۱}{۴}(۶)(۳)=\frac{۹}{۲}$$

پس حاصل حد برابر با $-۱+\frac{۱}{۲f(۹)}=-۱+\frac{۱}{۹}=\frac{-۸}{۹}$ می‌باشد.

سؤالات منتخب

۱. اگر $f(x)=\begin{cases} ax-1 & ; \ x<1 \\ x^2+2a & ; \ x\geq 1 \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ✓ ۴) -4

۲. اگر $f(x)=\begin{cases} 1 & ; \ x>1 \\ -1 & ; \ x<1 \end{cases}$ و نمودار تابع g به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)}{1+2g(x)}$ کدام است؟

۱) ۱

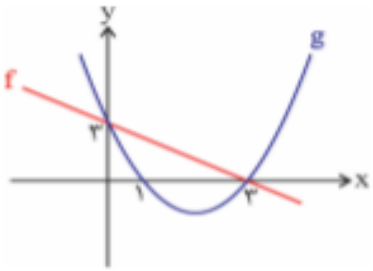
۲) $-\dfrac{1}{5}$ ✓

۳) $\dfrac{1}{5}$

۴) -1

www.biomaze.ir

۲۳ - نمودار تابع خطی f و تابع درجهٔ دوم g به‌صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)+1}{xf^{-1}(x)-2}$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) $\dfrac{1}{2}$

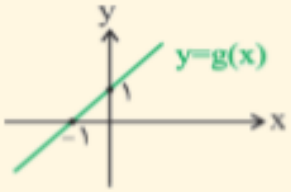
۴) -3

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۲۰ تا ۱۲۶ ـ متوسط)

هر تست ما از یک کلاس درس!

برای محاسبهٔ حد توابعی که خود برحسب توابع دیگری مانند f و g نوشته شده‌اند ابتدا باید ضابطهٔ f و g را به‌دست آوریم و در ضابطهٔ تابع مورد نظر جایگذاری کنیم و سپس از ضابطهٔ به‌دست آمده حد بگیریم.

مثال: اگر نمودار تابع $g(x)$ به‌صورت مقابل باشد حاصل حد $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{g(x)}{x^2-1}$ را به‌دست آورید.



ابتدا باید ضابطهٔ تابع خطی g را به‌دست آوریم:

$$\begin{matrix}(-,1)\\(-1,-)\end{matrix} \Rightarrow m=1 \Rightarrow g(x)=x+1$$

حال با جایگذاری ضابطه $g(x)$ در حد مورد نظر حاصل را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-2}$$

ابتدا ضابطهٔ توابع $g(x)$ و $f^{-1}(x)$ را به‌دست آورده و سپس حد داده شده را محاسبه می‌کنیم. با توجه به این که تابع g تابعی درجه دوم است برای به‌دست آوردن ضابطهٔ آن داریم:

$$g(x)=a(x-1)(x-3)\xrightarrow{g(0)=3} 3=a(-1)(-3)\Rightarrow a=1\Rightarrow g(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$$

با توجه به خطی بودن تابع f برای به‌دست آوردن ضابطهٔ f^{-1} داریم:

$(3,-)$ روی f^{-1} قرار دارد $\Rightarrow$ $(-,3)$ روی f قرار دارد

$(-,3)$ روی f^{-1} قرار دارد $\Rightarrow$ $(3,-)$ روی f قرار دارد

$$f^{-1}(x)=-x+h\xrightarrow{f^{-1}(0)=3} h=3\Rightarrow f^{-1}(x)=-x+3$$

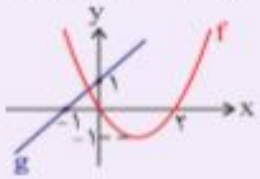
www.mapedu.ir

حال به محاسبهٔ حد داده شده می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)+1}{xf^{-1}(x)-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+3+1}{x(-x+3)-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{-x^2+3x-2}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{-(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{-(x-1)}=\frac{0}{-1}=0$$

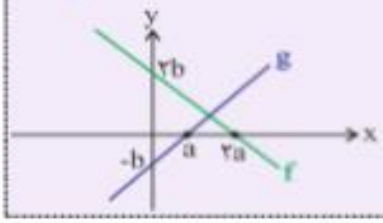
سؤالات منتخب



۱. اگر نمودار تابع درجه دوم f و تابع خطی g به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)g(x)}{f(x)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ✓

۳) -1 ۴) -2



۲. اگر نمودار دو تابع f و g به‌صورت مقابل باشند، مقدار $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) -1 ✓

۳) ۲

۴) -2

گروه آموزشی ماز

۲۴ - اگر $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+1}{ax^2-\sin 2x}=-\frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to(\frac{5\pi}{2})^-}\frac{\tan x}{1+a\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) -1

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۸ تا ٦٤ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) برای محاسبهٔ حد توابع کسری در بی‌نهایت، که صورت و مخرج آنها شامل چند جمله‌ای است، ابتدا باید در صورت و مخرج جمله با درجهٔ بزرگ‌تر را انتخاب کنیم. به عنوان مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+2}{2x^3+x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$$

۲) هنگام محاسبهٔ حد توابع به فرم $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $x=a$، اگر صورت کسر عددی مخالف صفر و مخرج کسر عددی در همسایگی صفر باشد باید حتماً نوع صفر به لحاظ بیشتر یا کمتر بودن مشخص شود تا بتوان حاصل حد را به‌دست آورد. به عنوان مثال:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{x(x-1)}=\frac{1}{0^+\times(-1)}=-\infty$$

ابتدا با توجه به حد در بی‌نهایت مورد نظر، پارامتر a را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+1}{ax^2-\sin 2x}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{ax^2}=\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=-2$$

حال با جایگذاری $a=-2$ در حد دوم به محاسبهٔ آن می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to(\frac{5\pi}{2})^-}\frac{\tan x}{1-2\sin^2 x}=\lim_{x\to(\frac{5\pi}{2})^-}\frac{\tan x}{\cos 2x}=\frac{+1}{0^-}=-\infty$$

سؤالات منتخب

۱. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^{11}-12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۹)

۱) $\frac{1}{24}$ ✓ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{5}{36}$

۲. اگر $f(x)=\sqrt{x}\left(\sqrt{9x+1}-\sqrt{x+4}\right)$ آنگاه حاصل حد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲ ✓

www.biomaze.ir

۲۵- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^2-4} & ; \ x<1\\ 2a+\sin(\pi x+\frac{\pi}{6}) & ; \ x\ge 1\end{cases}$ فقط در یک نقطه ناپیوسته است؟

۱) $\frac{5}{14}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{3}{14}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳۷ تا ۱۴۲ ـ متوسط)

هر تست ما ز یک کلاس درس!

برای بررسی پیوستگی توابع چند ضابطه‌ای باید حدود چپ و راست و مقدار تابع را در نقاط مرزی به‌دست آورده و در صورتیکه مقادیر به‌دست آمده با هم برابر باشند تابع در آن نقطهٔ مرزی پیوسته است.

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}3x+1 & ; \ x\ge 1\\ \cos\pi x & ; \ x<1\end{cases}$، در نقطه $x=1$ را بررسی کنید.

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 3x+1=4$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\cos\pi x=\cos\pi=-1$$

با توجه به این که در نقطهٔ مرزی $x=1$ حد چپ و راست نابرابر بوده، تابع در این نقطه ناپیوسته است.

با توجه به این که ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{a}{x^2-4}\ ;\ x<1$ در نقطهٔ $x=-2$ (ریشه مخرج) ناپیوسته است برای این که تابع $f(x)$ فقط در یک نقطه ناپیوسته باشد، کافیست شرط پیوستگی در نقطهٔ $x=1$ برقرار باشد. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{a}{x^2-4}=\dfrac{a}{(1)^2-4}=-\dfrac{a}{3}\\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2a+\sin(\pi x+\frac{\pi}{6})=2a+\sin(\pi+\frac{\pi}{6})=2a-\frac{1}{2}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow -\frac{a}{3}=2a-\frac{1}{2}\\ \Rightarrow a=\frac{3}{14}\end{array}$$

سؤالات منتخب

۱. فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & ; \ |x-1|<1\\ x^2+ax+b & ; \ |x-1|\ge 1\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۹)

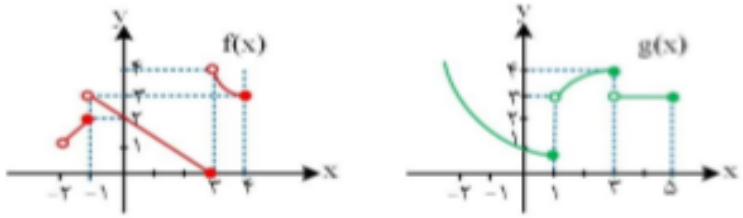
۱) $-\frac{3}{2}$ ✓ ۲) -1 ۳) 1 ۴) $\frac{5}{2}$

۲. به‌ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\cos^2 x} & ; \ x\ne\frac{\pi}{2}\\ a & ; \ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟ (تاریخ ـ ۹۹)

۱) ۱/۵ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۱/۵- ✓

www.mapedu.ir

۲۶ - اگر نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت مقابل باشند، حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{xf([g(x)])-1}{f(g(x))}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{4}$

۲) $-\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $-\frac{1}{2}$

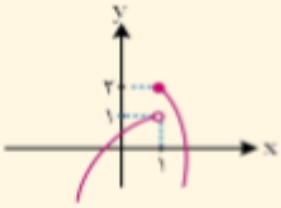
پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۲۰ تا ۱۲۶ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

برای محاسبه حد تابع $y=f(g(x))$ در نقطهٔ $x=a$ ابتدا حد تابع درونی (g) را در این نقطه محاسبه کرده و اگر عددی مانند L حاصل حد تابع g باشد با مشخص کردن کمتر یا بیشتر بودن L به سراغ محاسبهٔ حد تابع بیرونی (f) در نقطهٔ $x=L$ می‌پردازیم.

مثال) اگر $f(x)=\begin{cases}3x & ; \ x\geq 2\\ 3x-1 & ; \ x<2\end{cases}$ و نمودار تابع $g(x)$ به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} f(g(x))$ را به دست آورید.

با توجه به این که نمودار تابع g در سمت راست $x=1$ از پایین به ۲ نزدیک می‌شود، پس داریم:



$$\lim_{x\to 1^+} f(g(x))=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 3x-1=3(2)-1=5$$

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{xf([g(x)])-1}{f(g(x))}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1^+} xf([g(x)])-1}{\lim\limits_{x\to 1^+} f(g(x))}$ است.

وقتی $x\to 1^+$، آن‌گاه $g(x)>3$ می‌باشد و در نتیجه $[g(x)]=3$ است، پس:

$$\frac{\lim\limits_{x\to 1^+} xf([g(x)])-1}{\lim\limits_{x\to 1^+} f(g(x))}=\frac{1\times f(3)-1}{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)}$$

با توجه به نمودار $f(x)$، $f(3)=0$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4$ می‌شود، پس:

$$\frac{f(3)-1}{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)}=\frac{0-1}{4}=-\frac{1}{4}$$

۲۷ - اگر باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x+1)$ بر $x+2$ و $x-2$ به ترتیب -1 و ۳ باشد، حاصل $5\lim\limits_{x\to -1} f(2-x)-\lim\limits_{x\to 0^+} 2f([x-1])$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۰ تا ۵۲ ـ دشوار)

باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x+1)$ بر $x+2$ و $x-2$ به ترتیب -1 و ۳ می‌باشد، پس با توشتن قضیهٔ تقسیم داریم:

$$f(x+1)=(x+2)q(x)+R \xrightarrow{x=-2} f(-2+1)=\underbrace{(-2+2)}_{0}q(2)+(-1)\Rightarrow f(-1)=-1 \quad (1)$$

$$f(x+1)=(x-2)q(x)+R \xrightarrow{x=2} f(2+1)=\underbrace{(2-2)}_{0}q(2)+3\Rightarrow f(3)=3 \quad (2)$$

با استفاده از نتایج (۱) و (۲) برای محاسبهٔ حد داریم:

$$5\lim_{x\to -1} f(2-x)-\lim_{x\to 0^+} 2f([x-1])=5f(2-(-1))-2f\left(\left[(-1)^+\right]\right)=5f(3)-2f(-1)=5(3)-2(-1)=17$$

سوالات منتخب:

۱- فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x)=p(x-1)+p(1-x)$ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) صفر ✓ ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۲- فرض کنید باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به ترتیب ۳ و ۱ باشد، باقی‌مانده تقسیم $p(x^2)+4p(-x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) ۷ ✓ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -1

گروه آموزشی ماز

۲۸ - حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5-\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+5}}{x+\left[x^2-8x+12\right]}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{17}{10}$ ۲) $-\dfrac{17}{10}$ ۳) $-\dfrac{17}{20}$ ۴) $\dfrac{17}{20}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۲۰ تا ۱۳۶ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$، اگر پس از جایگذاری $x=a$ به ابهام $\frac{0}{0}$ برسیم، برای رفع ابهام می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم. طبق این قاعده به جای $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ می‌توانیم از کسر $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ وقتی $x\to a$ حد بگیریم، یعنی:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال) حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{4}}}=-2$$

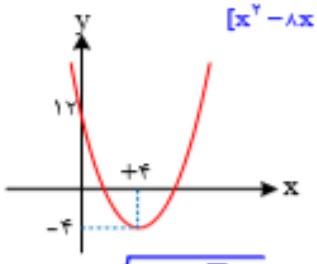
در محاسبهٔ حد کسرهای شامل رادیکال، اگر عبارت زیر رادیکال صفر شود، اکثراً نمی‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم. در این حدها باید ابتدا رادیکال را از بین ببریم و سپس حد را محاسبه کنیم.

مثال) حاصل $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{2x^2+7x+3}$ کدام است؟

می‌دانیم $\sqrt{x^2+6x+9}=|x+3|$ است، پس:

$$\lim_{x\to(-3)^-}\frac{|x+3|}{2x^2+7x+3}=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{-(x+3)}{(x+3)(2x+1)}=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{-1}{2x+1}=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5}$$

با توجه به نمودار تابع $y=x^2-8x+12$ وقتی $x\to 4$ برود، نتیجه می‌گیریم $(x^2-8x+12)>-4$. پس: $[x^2-8x+12]=-4$



$$\lim_{x\to 4}\frac{5-\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+5}}{x+[x^2-8x+12]}=\lim_{x\to 4}\frac{5-\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+5}}{x-4}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 4}\frac{-\frac{2x+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+5}}}{1}=-\frac{8+\frac{1}{2}}{2\sqrt{25}}=-\frac{\frac{17}{2}}{10}=-\frac{17}{20}$$

سوالات منتخب:

۱- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+[\cos \pi x]}{3-\sqrt{2x+7}}$ کدام است؟

۱) -6 ✓ ۲) 6 ۳) -3 ۴) 3

۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sin^2 \pi x}{[x]+\cos \pi x}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ✓ ۳) π ۴) 2π

www.biomaze.ir

۲۹ - اگر $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{a(x-1)^3+b(2x+1)^3}{\sqrt{x^2+1}\times\sqrt{4x^2-x}}=9$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{a^2x^2+1}}{bx}$ کدام است؟

۱) 3 ۲) -3 ۳) 6 ۴) -6

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ - صفحه ۵۸ تا ۶۴ - دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

برای این که بتوانیم حد توابع گویا را در بی‌نهایت سریع‌تر محاسبه کنیم، می‌توانیم در صورت و مخرج کسر فقط جمله‌ای که بیش‌ترین توان را دارد [جملهٔ پرتوان] انتخاب کنیم و حاصل حد را در بی‌نهایت به دست آوریم.

مثال) حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+x-6}{4x^2+1}$ را به دست آورید.

در صورت و مخرج کسر جملهٔ پرتوان را انتخاب می‌کنیم و داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+x-6}{4x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2}{4x^2}=\frac{9}{4}$$

با استفاده از هم‌ارزی پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{a(x-1)^3+b(2x+1)^3}{\sqrt{x^2+1}.\sqrt{4x^2-x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{a(x^3-3x^2+3x-1)+b(8x^3+12x^2+6x+1)}{\left|\underbrace{x}_{-}\right|\cdot\left|\underbrace{2x}_{-}\right|}$$

از آن جایی که حاصل حد وقتی $x\to -\infty$ برود برابر عدد ۹ است، پس جملات دارای توان ۳ باید از صورت کسر حد حذف شوند. از طرفی درجهٔ عبارت پرتوان مخرج برابر ۲ است، پس درجهٔ عبارت پرتوان صورت نیز باید برابر ۲ باشد، پس داریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{a(x^3-3x^2)+b(8x^3+12x^2)}{2x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{(a+8b)x^3+(12b-3a)x^2}{2x^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+8b=0\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(12b-3a)x^2}{2x^2}=9\Rightarrow 12b-3a=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+8b=0\\ -3a+12b=18\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=-4\\ b=\frac{1}{2}\end{matrix}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+\sqrt{a^2x^2+1}}{bx}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x+4\left|\underbrace{x}_{-}\right|}{\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{(1-4)x}{\frac{1}{2}x}=-6$$

سوالات منتخب:

در تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{(a-1)x^2+bx+1}{x-4}$، اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ✓ ۳) 1 ۴) صفر

www.mapedu.ir

۳۰ - هرگاه تابع $f(x)$ یک تابع خطی و $\lim\limits_{x\to -3}\frac{|2x^2|+f(x)}{x^2-9}=\frac{4}{3}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{5\pi}{3}} f(\cos x)$ کدام است؟

۱) -10 ۲) -2 ۳) -4 ۴) -8

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۲۸ الی ۱۳۶ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اولین گام در حدگیری جایگذاری نقطه است، اگر به $\frac{0}{0}$ رسیدیم حالت مبهم است که باید پس از ساده کردن عامل صفر شونده مقدار حد را تعیین کرد، پس اگر مخرج صفر و جواب حد عددی حقیقی بود حتماً صورت کسر هم صفر بوده که پس از رفع ابهام به عدد رسیده‌ایم.

قاعده هوپیتال:

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f}{g}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{جهت رفع ابهام}}\lim\limits_{x\to a}\frac{f'}{g'}$

ابتدا -3 را جایگذاری می‌کنیم:

با توجه به اینکه $2x^2$ همواره مثبت است قدرمطلق را برمی‌داریم: $\lim\limits_{x\to -3}\frac{|2x^2|+f(x)}{x^2-9}=\frac{18+f(-3)}{0}\Rightarrow$

چون مخرج صفر و جواب حد $\frac{4}{3}$ است، پس حتماً صورت هم صفر است: $\Leftarrow f(-3)=-18$

برای رفع ابهام از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+f(x)}{x^2-9}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -3}\frac{4x+f'(x)}{2x}=\frac{-12+f'(-3)}{-6}=\frac{4}{3}\Rightarrow f'(-3)=4$$

تابع $f(x)=ax+b$ خطی است $\Leftarrow f'(x)=a\Leftarrow a=4$

$f(-3)=-18$ داریم $\Rightarrow 4(-3)+b=-18\Rightarrow b=-6\Rightarrow f(x)=4x-6$

$$\lim_{x\to \frac{5\pi}{3}} f(\cos x)=f(\cos\frac{5\pi}{3})=f(\cos(-\frac{\pi}{3}))=f(\frac{1}{2})=2-6=-4$$

۳۱ - اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+ax^2+bx}{x-2}=0$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{bx+\sqrt{-ax^2+10}}{(a+b)x^2+3x+1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۰ الی ۶۴ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

هرگاه حاصل حد متناهی کسری برابر صفر شود، قطعاً عامل صفرکننده در صورت کسر باقی‌مانده است.

برای حدگیری در بی‌نهایت از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم:

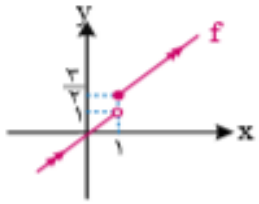
$$\lim_{x\to\infty} ax^n+bx^{n-1}+\dots+z\sim ax^n$$

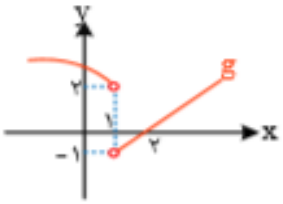
چون حاصل حد صفر شده پس عامل $(x-2)$ در صورت باقی‌مانده است، پس عامل $(x-2)$ در صورت توان ۲ داشته است. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x(x^2+ax+b)}{x-2}=0$

$(x-2)^2=x^2-4x+4$ مقایسه x^2+ax+b $\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=4\end{cases}$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x+\sqrt{4x^2+10}}{3x+1}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرتوان}}\lim_{x\to -\infty}\frac{4x+|2x|}{3x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{4x-2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

۳۲ - با توجه به نمودار توابع f و g حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2f(x)-3}{g(x)+1}$ کدام است؟





۱) ۲

۲) $-\frac{1}{3}$

۳) -2

۴) حد موجود نیست.

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ و ریاضی ۲ ـ صفحه ۵۰ الی ۵۶ و صفحه ۶۶ الی ۷۰ ریاضی ۳ و صفحه ۱۲۰ الی ۱۲۶ ریاضی ۲ ـ دشوار)

هر تست ما رو یک کلاس درس!

برای رفع ابهام حدهای $\frac{0}{0}$ از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم، یعنی به جای خود توابع صورت و مخرج از مشتقات آن‌ها حد می‌گیریم.

مفهوم مشتق:

شیب خط مماس بر منحنی را مشتق تابع گوییم، حال اگر تابع به صورت خط باشد شیب آن خط همان مقدار مشتق است.

توابع f و g در نقطه $x=1$ حد ندارند اما با توجه به اینکه خود صورت سوال مشخص کرده که حدگیری در همسایگی راست ۱ انجام شود، پس باید فقط همسایگی راست عدد ۱ را بررسی کرد:

$$\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\frac{3}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=-1\end{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2f(x)-3}{g(x)+1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2f'(x)}{g'(x)}=\frac{2}{1}=2$$

برای محاسبه $f'(x)$ و $g'(x)$ شیب خط‌های متناظر با آن‌ها در همسایگی راست عدد یک را بدست می‌آوریم.

در تابع f: دو خط موازی، شیب برابر دارند ← شیب خط: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{1}=1 \Leftarrow f'(x)=1$

در تابع g خط از دو نقطه $(1,-1)$ و $(2,0)$ می‌گذرد ← شیب خط: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{1}=1 \Leftarrow g'(x)=1$

۳۳- چندجمله‌ای $p(x)=x^8+ax^5-x^2+2$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(3-x)+p(x-1)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۰ و ۵۱ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+1$ برابر $p(-1)$ است. پس:

$$p(-1)=1-a-1+2=0 \to a=2 \Rightarrow p(x)=x^8+2x^5-x^2+2$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(3-x)+p(x-1)$ بر $x-2$ برابر است با:

$$R=p(3-2)+p(2-1)=p(1)+p(1)=2p(1)$$

بنابراین:

$$R=2(1+2-1+2)=8$$

گروه آموزشی ماز

۳۴- هیچ همسایگی راست نقطهٔ a در دامنهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{4x-x^2}}{x-[x]}$ قرار ندارد ولی یک همسایگی چپ آن در دامنهٔ این تابع قرار دارد. مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{a}{2}^-} xf(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۳ و ۵٤ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

دامنهٔ تابع f را معین می‌کنیم:

$$\begin{cases}4x-x^2\ge 0 \Rightarrow 0\le x\le 4\\ x-[x]\ne 0 \Rightarrow x\ne[x]\Rightarrow x\notin \mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow D_f=(0,1)\cup(1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)$$

بنابراین هیچ همسایگی راست نقطه $x=4$ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد ولی یک همسایگی چپ این نقطه در دامنهٔ تابع f قرار دارد. پس:

$$\lim_{x\to\frac{a}{2}^-} xf(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x\sqrt{4x-x^2}}{x-[x]}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x\sqrt{4x-x^2}}{x-1}=\frac{2\sqrt{8-4}}{2-1}=4$$

گروه آموزشی ماز

۳۵- تابع $f(x)=\frac{x^3+ax+2a}{x^2-3x+2}$ فقط در یک نقطه حد ندارد. مجموع مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) $-\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{7}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳۰ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

تابع f فقط در ریشه‌های مخرج $f(x)$ می‌تواند حد نداشته باشد که آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1, x=2$$

هر کدام از این اعداد، ریشهٔ صورت $f(x)$ هم باشند، تابع f در آن‌ها حد دارد. پس:

$$x=1 \Rightarrow 1+a+2a=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

$$x=2 \Rightarrow 8+2a+2a=0 \Rightarrow a=-2$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر $-\frac{7}{3}$ است.

۳۶- اگر $f(x+2^x)=x^3-3^x$، مقدار $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)}{f(x-5)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳۰ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x)}{f(x-5)}=\frac{\lim\limits_{x\to 6}f(x)}{\lim\limits_{x\to 6}f(x-5)}=\frac{\lim\limits_{x\to 6}f(x)}{\lim\limits_{t\to 1}f(t)}$$

از طرف دیگر، اگر $x\to 0$، آن‌گاه $(x+2^x)\to 1$ و اگر $x\to 2$، آن‌گاه $(x+2^x)\to 6$. بنابراین:

$$\lim_{t\to 1}f(t)=\lim_{x\to 0}f(x+2^x)=\lim_{x\to 0}(x^3-3^x)=0-1=-1$$

$$\lim_{x\to 6}f(x)=\lim_{x\to 2}f(x+2^x)=\lim_{x\to 2}(x^3-3^x)=8-4=4$$

پس حد موردنظر برابر است با:

$$\frac{\lim\limits_{x\to 6}f(x)}{\lim\limits_{t\to 1}f(t)}=\frac{4}{-1}=-4$$

گروه آموزشی ماز

۳۷- اگر تابع f در نقطهٔ $x=3$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to 3}\left(f^2(x)-4f(x)\right)=-4$، مقدار $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+1}{f(x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{10}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۲۹ و ۱۳۰ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

فرض کنید $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=L$، در این صورت:

$$\lim_{x\to 3}\left(f^2(x)-4f(x)\right)=L^2-4L=-4\Rightarrow L^2-4L+4=0\Rightarrow (L-2)^2=0\Rightarrow L=2$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 3}f(x)}=\frac{9+1}{2}=5$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- تابع $f(x)=x^2[-x]+[2x]$، در چند نقطه صحیح حد دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳۴ تا ۱۳۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

حد چپ و حد راست تابع f در نقطهٔ $x=k\in\mathbb{Z}$ را حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to k^+}f(x)=\lim_{x\to k^+}\left((-k-1)x^2+2k\right)=(-k-1)k^2+2k=-k^3-k^2+2k$$

$$\lim_{x\to k^-}f(x)=\lim_{x\to k^-}\left(-kx^2+2k-1\right)=-k.k^2+2k-1=-k^3+2k-1$$

اگر تابع f در $x=k$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست آن در این نقطه برابر باشند. پس:

$$\cancel{-k^3}-k^2+\cancel{2k}=\cancel{-k^3}+\cancel{2k}-1$$

$$k^2=1\Rightarrow k=\pm 1$$

بنابراین تابع f در نقاط صحیح $x=1$ و $x=-1$ حد دارد.

۳۹- مقدار $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{x+5}{x^2-x-2}\right](2x+1)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -6 ۳) -9 ۴) -12

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳۴ تا ۱۳۶ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

ابتدا حد تابع داخل جزء صحیح را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+5}{x^2-x-2}=\frac{1+5}{1-1-2}=-3$$

از طرف دیگر:

$$A=\frac{x+5}{x^2-x-2}-(-3)=\frac{x+5+3x^2-3x-6}{x^2-x-2}=\frac{3x^2-2x-1}{x^2-x-2}=\frac{(3x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$$

پس اگر $x>1$، آن‌گاه $A<0$، پس $\frac{x+5}{x^2-x-2}<-3$. بنابراین: $\left[\frac{x+5}{x^2-x-2}\right]=-4$. در نتیجه:

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x+5}{x^2-x-2}\right](2x+1)=\lim_{x\to 1^+}-4(2x+1)=-4\times 3=-12$$

گروه آموزشی ماز

۴۰- اگر $f(x)=\frac{4x-1}{x^3-6x}$، مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}f(x)f(\frac{2}{x})\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳۱ و ۱۳۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که:

$$\frac{1}{x}f(x)f(\frac{2}{x})=\frac{1}{x}\times\frac{4x-1}{x^3-6x}\times\frac{4\times\frac{2}{x}-1}{(\frac{2}{x})^3-6(\frac{2}{x})}=\frac{4x-1}{x^3-6x^2}\times\frac{\frac{8}{x}-1}{\frac{8}{x^3}-\frac{12}{x}}=\frac{4x-1}{x^3-6x^2}\times\frac{8x^2-x^3}{8-12x^2}=\frac{(4x-1)(8-x)}{(x^2-6)(8-12x^2)}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}f(x)f(\frac{2}{x})\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(4x-1)(8-x)}{(x^2-6)(8-12x^2)}=\frac{-1\times 8}{-6\times 8}=\frac{1}{6}$$

گروه آموزشی ماز

۴۱- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{ax^3-x+2-4a}{x^3+4ax+b}=-\frac{5}{8}$، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 3 ۴) -3

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳۱ و ۱۳۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که حد صورت کسر در $x=2$ برابر صفر است. پس حد مخرج آن هم در این نقطه باید برابر صفر باشد، در غیر این صورت حد کسر در $x=2$ برابر صفر خواهد بود. پس:

$$\lim_{x\to 2}(x^3+4ax+b)=8+8a+b=0\Rightarrow b=-8a-8$$

از طرف دیگر:

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^2-x+2-4a}{x^3+4ax-8a-8}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x^2-4)-(x-2)}{(x^3-8)+4a(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(ax+2a-1)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4+4a)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{ax+2a-1}{x^2+2x+4+4a}=\frac{2a+2a-1}{4+4+4+4a}=\frac{4a-1}{4a+12}=-\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 32a-8=-20a-60\Rightarrow 52a=-52\Rightarrow a=-1$$

بنابراین: $b=-8a-8=8-8=0$ و در نتیجه $b-a=1$.

گروه آموزشی ماز

۴۲- مقدار $\lim_{x\to 1^+}\frac{3x\sqrt{x-1}-(x+2)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^3-1}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}-\sqrt{6}$ ۴) $\sqrt{2}-\sqrt{6}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳۱ و ۱۳۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

در صورت و مخرج کسر عبارت $\sqrt{x-1}$ را جدا می‌کنیم و ساده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{3x\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}(x+2)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}\left(3x-\sqrt{x+1}(x+2)\right)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x-\sqrt{x+1}(x+2)}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{2}\times 3}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}-\sqrt{6}$$

گروه آموزشی ماز

۴۳- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2} & x\neq 4\\ 8 & x=4\end{cases}$ روی بازه $[0,+\infty)$ پیوسته است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -10 ۳) ۶ ۴) -6

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۴۰ تا ۱۴۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

حد مخرج $f(x)$ در $x=4$ برابر صفر است. اگر حد صورت $f(x)$ در $x=4$ برابر صفر نباشد، تابع f در $x=4$ حد نخواهد داشت و در نتیجه پیوسته نخواهد بود، پس حد صورت $f(x)$ در $x=4$ برابر صفر است. بنابراین:

$$\lim_{x\to 4}(ax+b)=4a+b=0\Rightarrow b=-4a$$

از طرف دیگر حد تابع f در $x=4$ باید برابر $f(4)$ باشد. پس:

$$\lim_{x\to 4}f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{ax-4a}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{a(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}a(\sqrt{x}+2)=4a$$

$$\Rightarrow 4a=8\Rightarrow a=2\to b=-8\Rightarrow a+b=-6$$

گروه آموزشی ماز

۴۴- تابع $f(x)=([x]+[-x])[\sqrt{x}]$ در چند نقطه از بازه $(0,8)$ حد دارد ولی پیوسته نیست؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۴۰ تا ۱۴۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

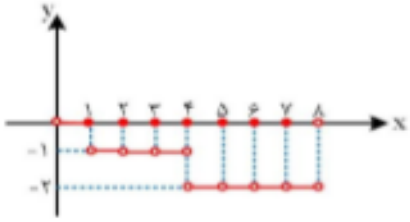
توجه کنید که $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$. پس:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -[\sqrt{x}] & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

از طرف دیگر:

$$0<x<1\Rightarrow 0<\sqrt{x}<1\Rightarrow[\sqrt{x}]=0$$
$$1<x<4\Rightarrow 1<\sqrt{x}<2\Rightarrow[\sqrt{x}]=1$$
$$4<x<8\Rightarrow 2<\sqrt{x}<\sqrt{8}\Rightarrow[\sqrt{x}]=2$$

بنابراین نمودار تابع f روی بازهٔ $(0,8)$ به صورت زیر است:



پس در نقاط ۷,۶,۵,۳,۲ تابع f حد دارد ولی پیوسته نیست.

گروه آموزشی ماز

۴۵- مقدار $\lim\limits_{x\to 16^-}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۳ تا ۵۷ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

اگر فرض کنیم $t=\sqrt[4]{x}$، آن‌گاه $t\to 2^-$ و حد موردنظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{t^2-4}{t^2-4t+4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(t-2)(t+2)}{(t-2)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{t+2}{t-2}=-\infty$$

گروه آموزشی ماز

۴۶- اگر $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{k\left[\frac{8x}{\pi}\right]-k^2}{\sin x-\cos x}=+\infty$، مجموعهٔ مقادیر ممکن k کدام است؟

۱) $(1,2)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(1,\frac{3}{2})$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۳ تا ۵۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

اگر $x\to\frac{\pi}{4}^+$، آن‌گاه $\sin x>\cos x$ و در نتیجه $(\sin x-\cos x)\to 0^+$. پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{k\left[\frac{8x}{\pi}\right]-k^2}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{2k-k^2}{\sin x-\cos x}=+\infty$$

چون مخرج کسر مقداری مثبت است، پس صورت آن هم باید مثبت باشد: $2k-k^2>0 \Rightarrow 0<k<2$ (۱)

به همین ترتیب، اگر $x\to\frac{\pi}{4}^-$، آن‌گاه $\sin x<\cos x$ و در نتیجه $(\sin x-\cos x)\to 0^-$، پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{k\left[\frac{8x}{\pi}\right]-k^2}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{k-k^2}{\sin x-\cos x}=+\infty$$

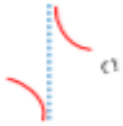
چون مخرج کسر مقداری منفی است، پس صورت آن هم باید منفی باشد:

$k-k^2<0 \Rightarrow k<0$ یا $k>1$ (۲)

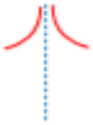
از اشتراک شرایط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $1<k<2$.

گروه آموزشی ماز

۴۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}-2}$ در اطراف خط $x=1$ چگونه است؟

۱) 

۲)

۳) 

۴)

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۳ تا ۵۷ ـ دشوار)

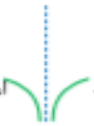
پاسخ تشریحی:

حد صورت $f(x)$ برابر ۱ و حد مخرج آن برابر صفر است. پس حد $f(x)$ بی‌نهایت است. از طرف دیگر صورت $f(x)$ مقداری مثبت است. همچنین:

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})^2}=\sqrt{x+2-x+2\sqrt{x(2-x)}}=\sqrt{2+2\sqrt{2x-x^2}}=\sqrt{2+2\sqrt{1-(x-1)^2}}\le\sqrt{2+2\sqrt{1-0}}=2$$

پس: $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\le 2 \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{2-x}-2\le 0$

یعنی مخرج $f(x)$ موردنظر در یک همسایگی محذوف $x=1$ مقداری منفی است و در نتیجه هم حد چپ و هم حد راست $f(x)$ در $x=1$ برابر $-\infty$ است و

نمودار f در اطراف $x=1$ به صورت  است.

گروه آموزشی ماز

۴۸- اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2b)x^3+bx^2+x}{ax^2-bx-1}=\frac{a^2+1}{4}$، مقدار ab کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) -2

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۸ تا ٦٤ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

چون حد کسر در بی‌نهایت برابر $\frac{a^2+1}{4}$ شده است، پس درجهٔ صورت و درجه مخرج کسر با هم برابرند. پس $a-2b=0$ و در نتیجه $a=2b$.

از طرف دیگر:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{bx^2+x}{ax^2-bx-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx^2}{ax^2}=\frac{b}{a}=\frac{b}{2b}=\frac{1}{2}$$

چون مخرج کسر مقداری مثبت است، پس صورت آن هم باید مثبت باشد:

$$2k-k^2>0 \Rightarrow 0<k<2 \quad (1)$$

به همین ترتیب، اگر $x \to \frac{\pi}{4}^-$، آن‌گاه $\sin x < \cos x$ و در نتیجه $(\sin x-\cos x) \to 0^-$، پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{k\left[\frac{8x}{\pi}\right]-k^2}{\sin x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{k-k^2}{\sin x-\cos x} = +\infty$$

چون مخرج کسر مقداری منفی است، پس صورت آن هم باید منفی باشد:

$$k-k^2<0 \Rightarrow k<0 \text{ یا } k>1 \quad (2)$$

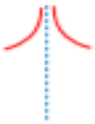
از اشتراک شرایط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $1<k<2$.

گروه آموزشی ماز

۴۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}-2}$ در اطراف خط $x=1$ چگونه است؟

۱)

۲)

۳) 

۴)

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۳ تا ۵۷ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

حد صورت $f(x)$ برابر ۱ و حد مخرج آن برابر صفر است. پس حد $f(x)$ بی‌نهایت است. از طرف دیگر صورت $f(x)$ مقداری مثبت است. همچنین:

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})^2}=\sqrt{x+2-x+2\sqrt{x(2-x)}}=\sqrt{2+2\sqrt{2x-x^2}}=\sqrt{2+2\sqrt{1-(x-1)^2}}\le\sqrt{2+2\sqrt{1-0}}=2$$

پس:

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\le 2 \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{2-x}-2\le 0$$

یعنی مخرج $f(x)$ موردنظر در یک همسایگی محذوف $x=1$ مقداری منفی است و در نتیجه هم حد چپ و هم حد راست $f(x)$ در $x=1$ برابر $-\infty$ است و

نمودار f در اطراف $x=1$ به صورت است.

گروه آموزشی ماز

۴۸- اگر $\lim_{x\to+\infty} \frac{(a-2b)x^2+bx^2+x}{ax^2-bx-1}=\frac{a^2+1}{4}$، مقدار ab کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) -2

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۸ تا ۶۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

چون حد کسر در بی‌نهایت برابر $\frac{a^2+1}{4}$ شده است، پس درجهٔ صورت و درجه مخرج کسر با هم برابرند. پس $a-2b=0$ و در نتیجه $a=2b$.

از طرف دیگر:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{bx^2+x}{ax^2-bx-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx^2}{ax^2}=\frac{b}{a}=\frac{b}{2b}=\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\frac{a^2+1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow a^2+1=2\Rightarrow a^2=1\Rightarrow\begin{cases}a=1\rightarrow b=\frac{1}{2}\\ a=-1\Rightarrow b=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

پس: $ab=\frac{1}{2}$

گروه آموزشی ماز

۴۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2+kx+1}$ در بی‌نهایت به صورت ..... است. مجموعهٔ مقادیر ممکن k کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $[-1,0)$ ۴) $\{-1\}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۸ تا ۶۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

توجه کنید $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

اکنون توجه کنید که نمودار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ زیرخط $y=1$ قرار دارد، یعنی $f(x)<1$، پس علامت عبارت $f(x)-1$ در $+\infty$ و $-\infty$ باید منفی باشد.

با توجه به اینکه علامت x^2+kx+1 در $+\infty$ و $-\infty$ مثبت است، پس باید علامت $A=(-k-1)x-1$ در $+\infty$ و $-\infty$ منفی باشد.

$$f(x)<1\Rightarrow f(x)-1<0\Rightarrow\frac{(-k-1)x-1}{x^2+kx+1}<0$$

اگر $-k-1=0$، آن‌گاه $k=-1$ و $A=-1<0$، در غیر این صورت عبارت A یک چندجمله‌ای درجه اول است و علامت آن در $+\infty$ و $-\infty$ نمی‌تواند منفی باشد. پس تنها مقدار ممکن برای k برابر -1 است.

گروه آموزشی ماز

۵۰- اگر $f(x)=\frac{4x|x|+k^2x^2+1}{x^2-3x+2}$ و $\lim\limits_{x\to1^+}(fof)(x)=5$، مقدار $f(\frac{k^2}{3})$ کدام است؟

۱) ۴۹ ۲) ۵۹ ۳) ۶۱ ۴) ۶۳

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۵ و ۵۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

توجه کنید که:

$$f(x)=\frac{4x|x|+k^2x^2+1}{(x-1)(x-2)}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\frac{5+k^2}{0^-}=-\infty$$

یعنی اگر $x\to1^+$، آن‌گاه $f(x)\to-\infty$

از طرف دیگر:

$$\lim_{x\to1^+}(fof)=\lim_{x\to1^+}f(f(x))=\lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4t|t|+k^2t^2+1}{t^2-3t+2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4t^2+k^2t^2}{t^2}=k^2-4$$

بنابراین:

$$k^2-4=5\Rightarrow k^2=9$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{4x|x|+9x^2+1}{x^2-3x+2}\Rightarrow f(\frac{k^2}{3})=f(3)=\frac{36+81+1}{9-9+2}=59$$

گروه آموزشی ماز

۵۱- اگر $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$ ، $g(x)=\frac{x^3+kx^2+1}{x^2-x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=3$ ، مقدار k کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -5 ۴) -6

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۸ تا ٦٤ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که:

$$f(x)-g(x)=\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{x^3+kx^2+1}{x^2-x}=\frac{x^5-x^4-x^5-kx^4-x^2-x^3-kx^2-1}{(x^2+1)(x^2-x)}$$

$$=\frac{(-k-1)x^4-x^3-(1+k)x^2-1}{x^4-x^3+x^2-x}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-k-1)x^4}{x^4}=-k-1$$

در نتیجه:

$$-k-1=3\Rightarrow k=-4$$

گروه آموزشی ماز

۵۲- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}+2x+k}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=4$ ، مقدار k کدام است؟

۱) -6 ۲) -8 ۳) -10 ۴) -12

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۸ تا ٦٤ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

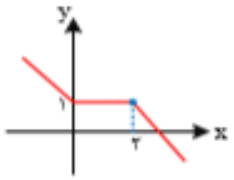
چون $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=4$ ، پس $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=+\infty$

بنابراین $x=4$ باید مخرج $f(x)$ را صفر کند:

$$\sqrt{4}+8+k=0\Rightarrow k=-10$$

گروه آموزشی ماز

۵۳- با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}[f(x)]+2\lim\limits_{x\to 2^-}[f(x)]-3\lim\limits_{x\to 2^+}[f(x)]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)



۱) صفر
۲)
۳)
۴)

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۲۲ و ۱۲۷ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

با توجه به شکل درمی‌یابیم:

$$\lim_{x\to 0^-}[f(x)]+2\lim_{x\to 2^-}[f(x)]-3\lim_{x\to 2^+}[f(x)]=[1^+]+2[1]-3[1^-]=1+2=3$$

سوالات منتخب:

در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+a)[x]$، اگر $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)-\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ✓ ۲) ۳) ۱- ۴) صفر

گروه آموزشی ماز

۵۴- اگر $\lim\limits_{x\to \frac{5\pi}{4}^+}\frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{1-\tan x}=k$ باشد، حاصل k^2-k کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) ۳) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۳۴ و ۱۳۶ ـ متوسط)

نکات طلایی:

۱) $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm\sin 2\alpha$

۲) رفع ابهام $\frac{0}{0}$: برای این کار باید عامل صفرکننده را در صورت و در مخرج یافت و با هم ساده نمود.

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}^+}\frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}^+}\frac{\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}^+}\frac{|\sin x-\cos x|}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}^+}\frac{-(\sin x-\cos x)}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}^+}\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین:

$$k^2-k=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

سوالات منتخب:

حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ کدام است؟ (سراسری ۹۷ ریاضی)

۱) ✓ $-2\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

گروه آموزشی ماز

۵۵- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+ax^2+bx+c}{(x-2)^2}=2$ باشد، حاصل $a-b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳) ۸ ۴) ۸-

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۳۲ و ۱۳۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

حد مخرج کسر در $x=2$ برابر صفر است. برای اینکه جواب حد عددی حقیقی گردد صورت کسر باید به شکل $(x-2)^2(x+k)$ باشد.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+k)}{(x-2)^2}=2\Rightarrow \lim_{x\to 2}(x+k)=2\Rightarrow 2+k=2\Rightarrow k=0$$

خواهیم داشت:

$$x^3+ax^2+bx+c=x(x-2)^2=x^3-4x^2+4x\Rightarrow a-b+c=-4-4+0=-8$$

سوالات منتخب:

اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\frac{3}{2}$ باشد، b کدام است؟ (خارج ۹۵ ریاضی)

۱) ۸- ✓ ۲) ۶- ۳) ۴)

گروه آموزشی ماز

۵۶- اگر $f(2-x)=\frac{x+[x]}{x[x]+|x|}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۵۷ ـ متوسط)

نکات طلایی:

$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$ $\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$ $\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$ $\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$

$\frac{\text{هر عبارتی}}{\text{مطلق ۰}}=$ تعریف نشده $\frac{\text{مطلق}-}{0^\pm}=-$ $\frac{0^\pm}{0^\pm}=$ مبهم

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(2-x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+[x]}{x[x]+|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{-x-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{-2x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

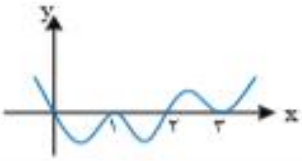
سوالات منتخب:

مقدار $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[-\frac{2}{x^2}]}$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.) (سراسری ۱۴۰۰)

۱) $-\infty$ ✓ ۲) صفر ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $+\infty$

گروه آموزشی ماز

۵۷- با توجه به نمودار f به ازای چند مقدار a حاصل $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-\sqrt{2}}{f(x)}=-\infty$ است؟



۱) صفر

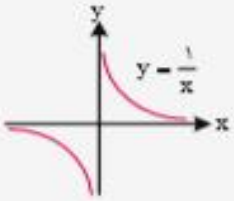
۲)

۳)

۴)

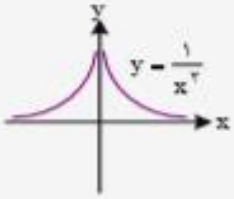
پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۵۵ تا ۵۷ ـ متوسط)

ریشهٔ مضاعف و ریشهٔ سادهٔ مخرج روی نمودار:



$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\end{cases}$$

$x=0$ ریشهٔ سادهٔ مخرج است.

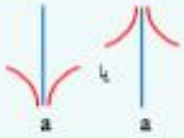


$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty\end{cases}$$

$x=0$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

نتیجه مهم:

اگر نمودار تابعی در همسایگی نقطهٔ a به یکی از دو صورت زیر بود، می‌فهمیم $x=a$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.



پاسخ تشریحی:

حد $\frac{x-\sqrt{2}}{f(x)}$ در نقاطی بی‌نهایت است که حد f(x) صفر باشد. f(x) در ۴ نقطهٔ $x=0$، $x=1$، $x=2$ و $x=3$ برابر صفر است. حد عبارت را در این چهار نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{2}}{f(x)}\begin{cases}\xrightarrow{0^+}\frac{-\sqrt{2}}{0^-}=+\infty\\ \xrightarrow{0^-}\frac{-\sqrt{2}}{0^+}=-\infty\end{cases}\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2}}{f(x)}=\frac{1-\sqrt{2}}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{2}}{f(x)}\begin{cases}\xrightarrow{2^+}\frac{2-\sqrt{2}}{0^+}=+\infty\\ \xrightarrow{2^-}\frac{2-\sqrt{2}}{0^-}=-\infty\end{cases}\qquad \lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{2}}{f(x)}=\frac{3-\sqrt{2}}{0^+}=+\infty$$

در هیچ‌یک از این نقاط، حاصل $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-\sqrt{2}}{f(x)}$، $-\infty$ نمی‌شود.

سؤالات منتخب:

اگر $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{2x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟ (سراسری ۹۳ ریاضی)

۱) -3 ۲) ۳) ✓ ۴)

www.mapedu.ir

۵۸- حاصل کدام حد $-\infty$ نیست؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x+1}{1-\cos x}$

۲) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x+1}{\cos x-1}$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x+\sqrt{3}}{\tan x-\sqrt{3}}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۵۷ ـ متوسط)

نکته:

در توابع کسری، اگر صورت به عددی غیرصفر و مخرج به صفر میل کند حاصل حد نامتناهی خواهد بود.

۱) $\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$ ۲) $\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$ ۳) $\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$ ۴) $\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$

پاسخ تشریحی:

بررسی موارد:

۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x+1}{1-\cos x}=\frac{1}{1-1^-}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x+1}{\cos x-1}=\frac{1+1}{1^--1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x+\sqrt{3}}{\tan x-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{0^-}=-\infty$

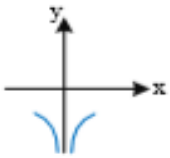
سوالات منتخب:

در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2-1}{x+|x|}$، کدام بیان درست است؟ (تجربی داخل ۹۸)

۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ ۳) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ✓

گروه آموزشی ماز

۵۹- بخشی از نمودار تابع $f(x)=\frac{4x+b}{x^3-x^2+ax}$ به شکل مقابل است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟



۱) $a<0$ و $b<0$

۲) $a=0$ و $b<0$

۳) $a=0$ و $b>0$

۴) $a<0$ و $b>0$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۵۵ و ۵۶ ـ متوسط)

نکته:

اگر $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$ باشد، $g(x)$ دارای ریشه مضاعف $x=a$ است.

پاسخ تشریحی:

چون در اینجا طبق نمودار $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ است، پس مخرج دارای ریشه مضاعف $x = 0$ است:

$$x^3 - x^2 + ax = x(x^2 - x + a)$$

یعنی عبارت $x^2 - x + a$ نیز دارای ریشه صفر است:

$$0 - 0 + a = 0 \to a = 0$$

پس ضابطه تابع به شکل $f(x) = \frac{6x+b}{x^3 - x^2}$ درمی‌آید. حال حد تابع را در $x = 0$ می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x+b}{x^2(x-1)} = \frac{b}{0^+(-1)} = \frac{b}{0^-} = -\infty \to b > 0$$

سوالات منتخب:

نمودار تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + ax + b}$ اطراف خط $x = -1$ به شکل مقابل است. $a + b$ کدام است؟

۱) -1
۲) 1
۳) 3 ✓
۴) صفر

گروه آموزشی ماز

۶۰- برای تابع پیوسته و اکیداً نزولی f، داریم $f(-3) = 5$. در این صورت $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{f(-7)}{f(x) - 5}$ کدام است؟

۱) -1
۲) -4
۳) $-\infty$
۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۵ و ۵۶ ـ متوسط)

نکته:

می‌دانیم در تابع اکیداً نزولی، اگر $x_2 > x_1$ باشد، آن‌گاه $f(x_2) < f(x_1)$ است.

پاسخ تشریحی:

ضمناً:

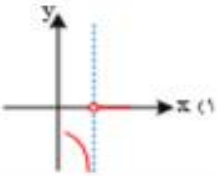
$$-7 < -3 \Rightarrow f(-7) > f(-3) \Rightarrow f(-7) > 5$$

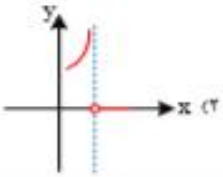
$$-3^- < -3 \Rightarrow f(-3^-) > f(-3) \Rightarrow f(-3^-) > 5$$

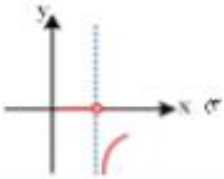
$$\Rightarrow \lim_{x\to -3^-} \frac{f(-7)}{f(x) - 5} = \frac{f(-7) > 0}{5^+ - 5} = \frac{f(-7)}{0^+} = +\infty$$

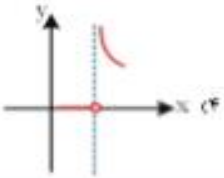
گروه آموزشی ماز

۶۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{[\sin x]}{x - \pi}$ در همسایگی $x = \pi$ چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۵ و ۵۶ ـ متوسط)

نکته:

حواستان باشد که $\frac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرحدی}}$ مبهم نیست و برابر صفر است.

پاسخ تشریحی:

کافیست حد راست و چپ تابع را در $x=\pi$ بیابیم:

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{[\sin x]}{x-\pi}=\frac{[0^-]}{0^+}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{[\sin x]}{x-\pi}=\frac{[0^+]}{0^-}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$$

پس طبق حدود بدست آمده، نمودار تابع حوالی $x=\pi$ به شکل گزینه (۳) خواهد بود.

سوالات منتخب:

حاصل $\lim_{x\to-2^-}\frac{[x]+3}{x+2}$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۹)

۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) صفر ✓ ۴) ۱

گروه آموزشی ماز

۶۲- اگر $\lim_{x\to2}\sqrt{x^2+ax+b}=0$ باشد، مقدار $2a-3b$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -20 ۳) ۴ ۴) -16

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۳۳ ـ متوسط)

نکته:

اگر $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=0$ باشد، باید f در همسایگی $x=a$ تعریف شده باشد. در این صورت اگر f درجه دوم باشد باید دارای ریشه مضاعف $x=a$ باشد و دهانه آن رو به بالا باشد.

پاسخ تشریحی:

$$x^2+ax+b=(x-2)^2\Rightarrow x^2+ax+b=x^2-4x+4\Rightarrow a=-4,\ b=4\Rightarrow 2a-3b=-8-12=-20$$

گروه آموزشی ماز

۶۳- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}[\tan x+\cot x]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۳٤ و ۱۳۵ ـ متوسط)

نکته:

می‌دانیم $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}[\tan x+\cot x]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}[\frac{2}{\sin 2x}]=[\frac{2}{\sin\frac{\pi}{2}^+}]=[\frac{2}{1^-}]=[2^+]=2$$

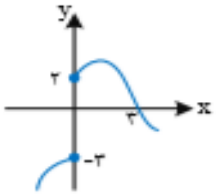
سوالات منتخب:

مقدار $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.) (تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱) -1 ✓ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

گروه آموزشی ماز

۶۴- اگر نمودار $y=f(x)$ به شکل مقابل باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to 3^+}[fof(x)]+\lim\limits_{x\to 3^-}[fof(x)]$ کدام است؟



۱) صفر
۲)
۳) -2
۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۳۵ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x\to 3^+}[fof(x)]=[f(f(3^+))]=[f(-^-)]=[-3^-]=-4$$

$$\lim_{x\to 3^-}[fof(x)]=[f(f(3^-))]=[f(-^+)]=[3^+]=2$$

پس حاصل تهایی $-4+2=-2$ است.

گروه آموزشی ماز

۶۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x-4}$ کدام است؟

۱)
۲) $\frac{5}{4}$
۳)
۴) $\frac{7}{4}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۵۲ و ۵۳ ـ متوسط)

نکته:

قضیه هوپیتال: اگر $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}=\dfrac{0}{0}$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'}{g'}$.(به شرطی که توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند.)

پاسخ تشریحی:

روش اول:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x+\sqrt{x}-6}{x-4}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 4}\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

روش دوم:

حذف عامل ابهام:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-6+\sqrt{x}}{x-4}\times\frac{x-6-\sqrt{x}}{x-6-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-6)^2-x}{(x-4)(x-6-\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-13x+36}{(x-4)(x-6-\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x-9)}{\cancel{(x-4)}(x-6-\sqrt{x})}=\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}$$

سوالات منتخب:

حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۱)
۲)
۳) -3
۴) $-\frac{3}{2}$ ✓

گروه آموزشی ماز

۶۶- حاصل حد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2-4x+7}-x^2}{3x+1}$ کدام است؟

۱)

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $-\frac{2}{3}$

۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحهٔ ۶۳ و ۶۴ ـ دشوار)

نکته:

اگر $x\to\pm\infty$ ، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}=\begin{cases}\sqrt[n]{a}\left|x+\dfrac{b}{na}\right| & n \text{ زوج}\\ \sqrt[n]{a}\left(x+\dfrac{b}{na}\right) & n \text{ فرد}\end{cases}$$ (هم ارزی برنولی)

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^2-4x+7}-x^2}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x|x-2|-x^2}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-x^2}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{3x+1}=-\frac{2}{3}$$

سوالات منتخب:

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax-\sqrt[3]{x^3-1}}{4x^n-12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{6}$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۹)

۱) $\frac{1}{24}$ ✓

۲) $\frac{1}{18}$

۳) $\frac{1}{12}$

۴) $\frac{5}{36}$

گروه آموزشی ماز

۶۷- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}[-x]+a & x>1\\ b & x=1\\ \dfrac{x^3+cx^2+dx}{(x-1)^2} & x<1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد، حاصل $2a-3b+c-d$ کدام است؟

۱) -1

۲)

۳) صفر

۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۳۷ تا ۱۴۲ ـ متوسط)

نکته:

تابع $y=f(x)$ در $x=a$ پیوسته است، اگر دارای حد چپ و راست و مقدار برابر در این نقطه باشد.

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\left[-(1^+)\right]+a=\left[-1^-\right]+a=-2+a$$

$$f(1)=b$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3+cx^2+dx}{(x-1)^2}$$

چون مخرج دارای دو عامل صفرکننده در $x=1$ است، باید صورت نیز حداقل دارای دو عامل صفرکننده باشد تا حاصل حد موجود باشد، پس عبارت $x(x^2+cx+d)$ دارای دو عامل $(x-1)$ است، یعنی:

$$x^2+cx+d=(x-1)^2\Rightarrow c=-2,\ d=1$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2}=1$$

$$a-2=b=1\to a=3\to 2a-3b+c-d=6-3-2-1=-$$

۶۸- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر x^2+2x-3 برابر $1-4x$ است. اگر چندجمله‌ای $af(x-1)+f(x-5)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد، a کدام است؟

۱) $-\frac{11}{3}$ ۲) $\frac{13}{3}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $-\frac{3}{13}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۰ و ۵۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

چون باقی‌مانده $f(x)$ بر x^2+2x-3 برابر $1-4x$ است، پس:

$$f(x)=(x^2+2x-3)q(x)+1-4x$$
$$f(x)=(x-1)(x+3)q(x)+1-4x$$
$$\Rightarrow f(1)=-3, f(-3)=13$$

از طرفی قرار است باقی‌ماندهٔ $af(x-1)+f(x-5)$ بر $x-2$ برابر صفر باشد، پس:

$$af(1)+f(-3)=0 \Rightarrow -3a+13=0 \Rightarrow a=\frac{13}{3}$$

گروه آموزشی ماز

۶۹- اگر $f(x)=2x^3-2ax^2+2x-4$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ $f(x+a)$ بر $x-1$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) -12 ۴) -6

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۰ و ۵۱ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

چون f بر $x-a$ بخش‌پذیر است، پس $f(a)=0$، یعنی:

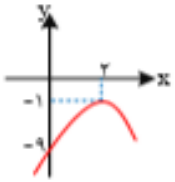
$$2a^3-2a^3+2a-4=0 \Rightarrow a=2$$
$$f(x)=2x^3-4x^2+2x-4$$

برای یافتن باقی‌مانده $f(x+2)$ بر $x-1$ کافی است $f(3)$ را بیابیم:

$$f(3)=2\times 27-4\times 9+6-4=54-36+2=20$$

گروه آموزشی ماز

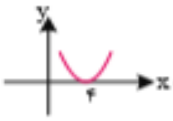
۷۰- نمودار سهمی به شکل روبه‌رو است. اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۱}{a-f(x+b)}=+\infty$ ، مقدار کدام است؟



۱)
۲)
۳) -۳
۴) -۵

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۶ و ۵۷ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

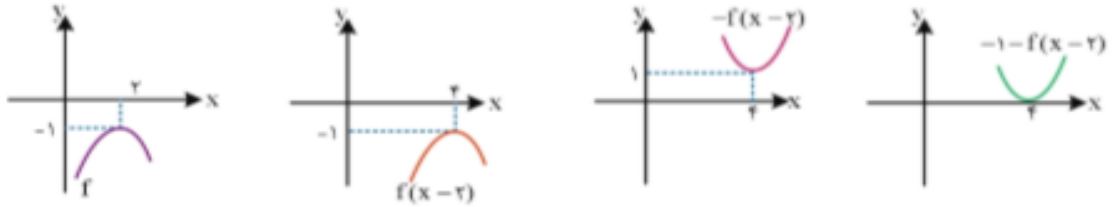


برای آن‌که $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۱}{a-f(x+b)}=-\infty$ ، باید اولاً $x=۴$ ریشه مضاعف مخرج باشد. ثانیاً نمودار عبارت مخرج در مجاورت $x=۴$ به صورت باشد، پس به کمک انتقال نمودار توابع داریم:

$$f(x)\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}}f(x-۲)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}}-f(x-۲)\xrightarrow{\text{۱ واحد به پایین}}-۱-f(x-۲)$$

$$\Rightarrow a=-۱,\ b=-۲\Rightarrow a+b=-۳$$

به این ترتیب:



گروه آموزشی ماز

۷۱- اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt{ax+۱}-۳}{۲x^۲-x-۶}=b$ ، عدد حقیقی ab کدام است؟

۱)
۲) $\frac{۴}{۲۱}$
۳) $\frac{۸}{۲۱}$
۴) $\frac{۴}{۷}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۳ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

مخرج به ازای $x=۲$ صفر است پس:

$$\sqrt{۲a+۱}-۳=۰\Rightarrow a=۴$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{۴x+۱}-۳}{(x-۲)(۲x+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{۴x+۱-۹}{(x-۲)\times(۲x+۳)\times(\sqrt{۴x+۱}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{۴(x-۲)}{۷\times ۶(x-۲)}=\frac{۴}{۴۲}=\frac{۲}{۲۱}$$

$$\begin{cases}a=۴\\ b=\frac{۲}{۲۱}\end{cases}\Rightarrow ab=\frac{۸}{۲۱}$$

گروه آموزشی ماز

۷۲- قسمتی از نمودار $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+\sqrt{x+2}}$ به شکل مقابل است. مقدار $a+b-x_0$ کدام است؟

۱)
۲)
۳)
۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۲ ، ۵۳ و ۵۷ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

با دقت به نمودار داده شده $\lim_{x\to x_0} f(x)=2$

اما x_0 ریشه مشترک صورت و مخرج است.

$$x+\sqrt{x+2}=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=-x \Rightarrow x=-1$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+ax+b}{x+\sqrt{x+2}}=2 \Rightarrow 1-a+b=0 \to a=b+1 \ *$$

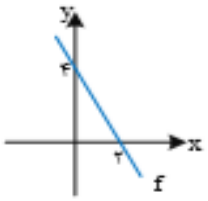
$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+b)(x-\sqrt{x+2})}{(x^2-x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x+b)(-2)}{\cancel{(x+1)}(x-2)}=\frac{-2(b-1)}{-3}=\frac{2}{3}(b-1)$$

$$\frac{2}{3}(b-1)=2 \Rightarrow b-1=3 \Rightarrow b=4 \xrightarrow{*} a=5,\ x_0=-1$$

$$\Rightarrow a+b-x_0=10$$

گروه آموزشی ماز

۷۳- نمودار تابع خطی f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{fof(x)-f^{-1}(x)}{3x-4}$ چه عددی است؟



۱) $\frac{2}{3}$
۲)
۳) $\frac{3}{4}$
۴)

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

چون f تابعی خطی با نمودار داده شده است، پس: $f(x)=-2x+4$

به این ترتیب:

$$fof(x)=-2(-2x+4)+4=4x-4$$

$$f^{-1}(x)=\frac{4-x}{2}=-\frac{1}{2}x+2$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{(4x-4)-(-\frac{1}{2}x+2)}{3x-4}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\frac{9}{2}x-6}{3x-4}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\frac{3}{2}(3x-4)}{3x-4}=\frac{3}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۷۴- با فرض آن‌که $f(x)=\frac{4x-2}{x+1}$ به طوری که $\lim\limits_{x\to+\infty} x(b-f(x))=a$ ، مقدار ab چه عددی است؟ $(a,b\in\mathbb{Z})$

۱) ۲۴ ۲) ۲۲ ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۶۳ و ۶۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(b-\frac{4x-2}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{(b-4)x+(b+2)}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(b-4)x^2+(b+2)x}{x+1}$$

دقت کنید قرار است مقدار حد یک عدد حقیقی باشد، چون مخرج از درجه اول است، لذا صورت نمی‌تواند از درجه ۲ باشد، پس $b-4=0$ یعنی $b=4$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(b+2)}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x+1}=6\Rightarrow a=6\Rightarrow ab=24$$

گروه آموزشی ماز

۷۵- تابع $f(x)=x+\sqrt{4x^2+x}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+f(ax)}{ax+f(x)}=2$ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۲) ۳) ۴) $\frac{1}{7}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۶۳ و ۶۴ ـ ساده)

پاسخ تشریحی

اولاً: می‌دانیم: $f(x)=x+\sqrt{4x^2+x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+|2x|=\lim_{x\to+\infty} 3x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+f(ax)}{ax+f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3ax}{ax+3x}=\frac{1+3a}{a+3}$$

$$\Rightarrow\frac{1+3a}{a+3}=2\Rightarrow 3a+1=2a+6\Rightarrow a=5$$

گروه آموزشی ماز

۷۶- تابع $f(x)=\frac{ax+\sqrt{4x^2+b}}{x+1}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ کدام است؟

۱) ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{5}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۶۳ و ۶۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+b}=\lim\limits_{x\to-\infty}|2x|=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)$ ، پس:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+\sqrt{4x^2+b}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+|2x|}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-2)x}{x+1}=a-2\Rightarrow a-2=1\Rightarrow a=3$$

با جایگزینی a در ضابطه تابع داریم:

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x+\sqrt{4x^2+b}}{x+1}$$

صورت کسر باید به ازای $x=-1$ صفر باشد تا به حالت ابهام $\frac{0}{0}$ برسد.

$$-3+\sqrt{4+b}=0\Rightarrow b=+5$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x+\sqrt{4x^2+5}}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{9x^2-4x^2-5}{(x+1)(3x-\sqrt{4x^2+5})}=\lim_{x\to-1}\frac{5\cancel{(x+1)}(x-1)}{-6\cancel{(x+1)}}=\frac{5}{3}$$

۷۷- اگر بازه $(2b-a, 2a+b)$ یک همسایگی عدد ۳ و یک همسایگی چپ عدد ۴ باشد، حدود b کدام است؟

۱) $b<2$ ۲) $b>2$ ۳) $b<1$ ۴) $b>1$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۵۳ تا ۵۴ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} 2a+b=4 \to a=\frac{4-b}{2} \\ 2b-a<3<4 \end{cases} \Rightarrow 2b-\frac{4-b}{2}<3 \Rightarrow 4b-4+b<6 \Rightarrow 5b<10 \Rightarrow b<2$$

گروه آموزشی ماز

۷۸- اگر توابع f و g در نقطه $x=1$ دارای حد باشند و $\lim\limits_{x\to1}(2f(x)+g(x))=7$ و $\lim\limits_{x\to1}(g(x)-f(x))=1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to3} g(3x-8)$ کدام است؟

۱) ۲) ۳) ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۲۸ تا ۱۳۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

فرض کنید: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=L_1,\ \lim\limits_{x\to1} g(x)=L_2 \Rightarrow \begin{cases} 2L_1+L_2=7 \\ L_2-L_1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1=2 \\ L_2=3 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1} g(x)=3$

$$\lim_{x\to3} g(3x-8)=\lim_{x\to1} g(x)=3$$

گروه آموزشی ماز

۷۹- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|+[-x]}{ax-[x]} & ; x<-1 \\ \frac{|x^2-1|}{x+1} & ; x>-1 \end{cases}$ در نقطه $x=-1$ حد دارد؟

۱) ۲) ۳) -1 ۴) هیچ‌مقدار

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۲۳ تا ۱۲۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$L_1=\lim_{x\to-1^+}\frac{|x^2-1|}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-(x+1)(x-1)}{x+1}=2$$

$$L_2=\lim_{x\to-1^-}\frac{|x|+[-x]}{ax-[x]}=\lim_{x\to-1^-}\frac{|x|+1}{ax-(-2)}=\frac{1+1}{-a+2}=\frac{2}{-a+2}=2 \Rightarrow a=1$$

گروه آموزشی ماز

۸۰- حاصل $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x+7}}$ کدام است؟

۱) ۲) ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۳۰ تا ۱۳۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x+7}}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to-2}\frac{(x+1+1)(\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x+7})}{(2x+5-2x-7)(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x+1}+1)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(2)}{(-x-2)(3)}=\frac{2}{-3}$$

گروه آموزشی ماز

۸۱- در تابع $f(x)=\frac{(x^3-x^2+a)(2x^2-x+b)}{(x^6-x)^2}$. اگر مقدار $f(1)$ را برابر c تعریف کنیم، تابع در $x=1$ پیوسته خواهد شد. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{8}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $-\frac{61}{64}$ ۴) $-\frac{33}{64}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۳۰ تا ۱۳۳ و ۱۳۷ تا ۱۴۰ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

اولاً برای اینکه تابع $f(x)$ بتواند در $x=1$ حد داشته باشد، لازم است که:

$$\begin{cases} x^3-x^2+a \xrightarrow{x=1} 1-1+a=0 \to a=0 \\ 2x^2-x+b \xrightarrow{x=1} 2-1+b=0 \to b=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{(x^3-x^2)(2x^2-x-1)}{(x^6-x)^2}$$

ثانیاً برای اینکه $f(x)$ در $x=1$ پیوسته باشد، $f(1)$ باید برابر حد تابع در نقطه $x=1$ باشد:

$$c=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-x^2)(2x^2-x-1)}{(x^6-x)^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)(2x+1)(x-1)}{x^2(x^8-1)^2}$$

$$c=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(3)}{(1)(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2(x^4+1)^2}=\frac{3}{64}\Rightarrow a+b+c=0-1+\frac{3}{64}=\frac{-61}{64}$$

$$(x^8-1)=(x^4-1)(x^4+1)=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

توجه: به کمک قاعده هوپیتال روش راحت‌تری برای محاسبه حد فوق خواهید داشت.

گروه آموزشی ماز

۸۲- اگر $f(x)=2x\left[\frac{-1}{x}\right]+|3-x|$. حاصل $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) 0 ۴) -3

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۵۸ تا ۶۰ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x\overbrace{\left[\frac{-1}{x}\right]}^{[0^-]}+|\overset{-}{3-x}|\right)=\lim_{x\to+\infty}2x(-1)+(-3+x)=\lim_{x\to+\infty}-x-3=-\infty$$

گروه آموزشی ماز

۸۳- باقی‌مانده تقسیم عبارت $p(x)=ax^2+x-3$ بر $x+1$ برابر -2 است و عبارت $q(x)=bx^3+2x-5$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است. حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x).q(x)}{\sqrt{x^7}\left((x+\sqrt{x})^2-(x-\sqrt{x})^2\right)}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۵۰ تا ۵۱ و ۵۸ تا ۶۰ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

$$p(-1)=-2\Rightarrow a-1-3=-2\Rightarrow a=2, q(+1)=0\Rightarrow b+2-5=0\Rightarrow b=3$$

$$\to\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+x-3)(3x^3+2x-5)}{\sqrt{x^7}(x^2+2x\sqrt{x}+x-x^2+2x\sqrt{x}-x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2)(3x^3)}{\sqrt{x^7}(4x\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5}{4x^5}=\frac{3}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۸۴- اگر $f(x)=\frac{|x|}{a|x-۱|-b}$ و $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=-\infty$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)$ کدام است؟

۱)

۲)

۳) $+\infty$

۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ _ صفحات ۵۳ تا ۵۶ _ متوسط)

پاسخ تشریحی:

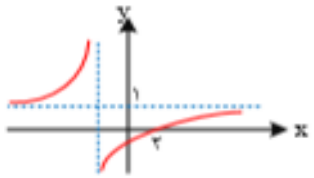
$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to ۳^+}|x|=۳>۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۳^+} a|x-۱|-b=۰^-$$

$$\Rightarrow ۲a-b=۰ \Rightarrow b=۲a \Rightarrow \lim_{x\to ۳^+}\frac{|x|}{a|x-۱|-۲a}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{|x|}{a(|x-۱|-۲)}=\frac{۳}{a(۰^+)}=-\infty\ ,\ a<۰$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{|x|}{a(|x-۱|-۲)}=\frac{۱}{a(۰^+)}\xrightarrow{a<۰}\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

گروه آموزشی ماز

۸۵- نمودار تابع $\frac{۱}{f}$ به شکل مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-}\left[f\left(f(x)\right)\right]$ کدام است؟



۱)

۲)

۳)

۴)

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ _ صفحات ۱۲۸ تا ۱۳۳ _ متوسط)

پاسخ تشریحی:

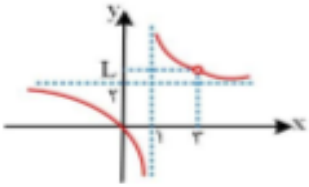
$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to ۲^-}\frac{۱}{f(x)}=۰^- \quad \left(\frac{۱}{۰^-}=-\infty\right)$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=۱^- \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty}\frac{۱}{f(x)}=۱^+ \quad \left(\frac{۱}{۱^+}=۱^-\right)$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\left[f\left(f(x)\right)\right]=\lim_{x\to -\infty}\left[f(x)\right]=\left[۱^-\right]=۰$$

گروه آموزشی ماز

۸۶- نمودار مقابل، متعلق به تابع $y=\frac{ax^3+bx}{x^3+cx+d}$ است. مقدار L کدام است؟



۱) $\frac{5}{2}$

۲)

۳)

۴) $\frac{7}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۵۸ و ۵۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$x=1$ و $x=3$، ریشه‌های مخرج هستند و ۳، صورت را صفر می‌کند.

$$ax^2+bx \xrightarrow{x=3} 0 \Rightarrow 9a+3b=0 \Rightarrow b=-3a$$

$$y=\frac{ax^2-3ax}{(x-1)(x-3)} \text{ و } \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2-3ax}{(x-1)(x-3)}=2 \Rightarrow \frac{ax^2}{x^2}=2 \Rightarrow a=2$$

$$y=\frac{2x^2-6x}{(x-1)(x-3)},\ L=\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-6x}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x\cancel{(x-3)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}}=\frac{6}{2}=3$$

گروه آموزشی ماز

۸۷- تابع $f(x)=\left[\frac{2x^3+2}{x}\right]$ در کدام نقطه زیر پیوسته است؟

۱)

۲) -1

۳)

۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۰۴ و ۱۰۵ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

هر ۴ نقطه داخل براکت را صحیح می‌کنند، پس پاسخ نقطه‌ای است که نقطه مینیمم نسبی تابع g باشد.

$$g=\frac{2x^2+2}{x} \Rightarrow g'=\frac{4x^2-(2x^2+2)}{x^2}=\frac{2x^2-2}{x^2}=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g'		+	0	−	0	+	
g		↗	max	↘	min	↗	

$x=1$ طول نقطه مینیمم نسبی g است.

۸۸- اگر $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\left[\frac{6x}{\pi}\right]-a}{b\cos x-2\sqrt{3}}=-\infty$ باشد، مقادیر $a+b$ در کدام بازه زیر قرار دارند؟

۱) $(4,5)$ ۲) $(3,4)$ ۳) $(5,6)$ ۴) $(1,2)$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۵۳ تا ۵۷ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

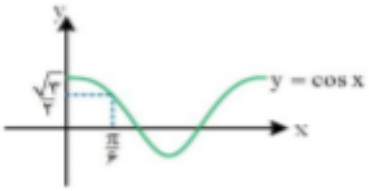
$x=\frac{\pi}{6}$، باید ریشه مخرج باشد:

$$b\cos\frac{\pi}{6}-2\sqrt{3}=0 \Rightarrow b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\sqrt{3}=0 \Rightarrow b=4$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+}\frac{\left[\frac{6x}{\pi}\right]-a}{4\cos x-2\sqrt{3}}=\frac{\left[1^+\right]-a}{0^-}=\frac{1-a}{0^-}=-\infty \Rightarrow 1-a>0 \Rightarrow a<1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}\frac{\left[\frac{6x}{\pi}\right]-a}{4\cos x-2\sqrt{3}}=\frac{\left[1^-\right]-a}{0^+}=\frac{0-a}{0^+}=-\infty \Rightarrow -a<0 \Rightarrow a>0$$

$$\Rightarrow 0<a<1 \xrightarrow{b=2} 4<a+b<5 \Rightarrow$$ گزینه ۱



۸۹- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-3-2a(-1)^{[x]}}{2x^2-3x+b}=+\infty$، مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۵۳ تا ۵۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

اولاً: باید $x=2$، ریشه مخرج باشد یعنی $0=b+6-8$، پس $b=-2$.

ثانیاً:

$$\lim_{x\to 2}\frac{-3-2a(-1)^{[x]}}{(x-2)(2x+1)}=+\infty$$

اگر $x\to 2^+$، آن‌گاه مخرج مقداری مثبت است، پس باید صورت هم مثبت باشد. $-3-2a(1)>0 \Rightarrow a<-\frac{3}{2}$

لذا $a<-\frac{3}{2}$ و $b=-2$، پس: $a+b<-3/5$.

۹۰- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{x+2} & x>2\\ c & x=2\\ \frac{x-1}{bx+2} & x<2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{8}{3}$ باشد، مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ یا $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ یا -1 ۳) -2 یا $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$ یا $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۳۷ تا ۱۴۱ / ریاضی ۳ ـ صفحات ۵۸ تا ۶۰ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که f در $x=2$ پیوسته است. پس:

$$\begin{cases} f(2)=c \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{ax}{x+2}=\frac{2a}{4}=\frac{a}{2} \rightarrow c=\frac{a}{2}=\frac{1}{2b+2} \\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x-1}{bx+2}=\frac{1}{2b+2}\end{cases}$$

از طرف دیگر:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax}{x+2}=a \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{bx+2}=\frac{1}{b}\end{cases} \Rightarrow a+\frac{1}{b}=-\frac{8}{3} \Rightarrow a=-\frac{8}{3}-\frac{1}{b}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a=\frac{1}{b+1} \\ a=-\frac{8}{3}-\frac{1}{b}\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b+1}=-\frac{8}{3}-\frac{1}{b} \Rightarrow 8b^2+14b+3=0 \Rightarrow \begin{cases} b=-\frac{3}{2} \\ b=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

بنابراین:

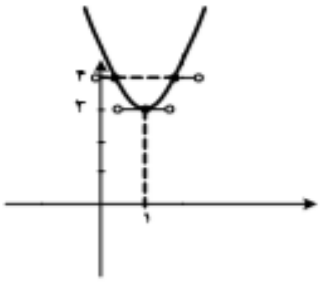
$$c=\frac{1}{2b+2} \Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ c=\frac{2}{3}\end{cases}$$

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

www.mapedu.ir

۱ . گزینه ۲ درست است.

با توجه به نمودار سهمی، به ازاء مقدار صحیح تابع سهمی $f(x)$، تنها در نقطه می‌نیمم دارای حد است. پس ضابطهٔ سهمی $f(x)=a(x-۱)^۲+۳$ و با توجه به طول نقطه می‌نیمم، در $x>-۱$ داریم: $f(x)<f(-۱)$ از طرفی، $\lim\limits_{x\to -۱^+}[f(x)]=۱۰ \Rightarrow ۱۰<f(x)$ و چون $[f(x)]$ در $x=-۱$ حد ندارد، $f(-۱)$ اولین مقدار صحیح بعد ۱۰، یعنی $f(-۱)=۱۱$ است.



$a(-۱-۱)^۲+۳=۱۱ \Rightarrow ۴a=۸ \Rightarrow a=۲$

$f(۴)=۲(۴-۱)^۲+۳=۲۱$

۲ گزینه ۱ درست است.

الف) اگر f و g در $x=a$ یکی پیوسته و دیگری ناپیوسته باشند توابع $f+g$ و $f-g$ در $x=a$ ناپیوسته هستند، پس نادرست است.

ب) در $x=۲$ تابع $g(x)=[x]$ ناپیوسته و $f(x)=(x-۲)$ در $x=۲$ پیوسته و $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-۲}{[x]}$ در $x=۲$ پیوسته است، پس درست است.

ج) توابع $f(x)=\begin{cases}۳ & x\le ۰\\ ۲ & x>۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۳ & x\le ۰\\ -۲ & x>۰\end{cases}$ در $x=۰$ ناپیوسته و $(f+g)(x)=۰$ در $x=۰$ پیوسته است، پس درست است.

د) اگر f و g در $x=a$ تعریف نشده باشد، تابع $\frac{f}{g}$ نیز تعریف نشده و ناپیوسته است. پس نادرست است.

۳. گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x}{x^۳+x}=۲ \Rightarrow a=۲$$

۴. گزینه ۴ درست است.

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to ۳}[۲x]=۵$ پس داریم

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۴x-۱۲}{x+۲-\sqrt{۵x+۱۰}}=۴\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(۵+۵)}{x^۲-x-۶}=۴\lim_{x\to ۳}\frac{۱۰(x-۳)}{(x-۳)(x+۲)}=۸$$

۵ گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x\to ۸}\frac{(۵+\sqrt{x+۱}-۸)(\sqrt{۲x}+۴)}{((\sqrt[۳]{۵+\sqrt{x+۱}})^{۲}+۲\left(\sqrt[۳]{۵+\sqrt{x+۱}}\right)+۴)(۲x-۱۶)}$$

$$\lim_{x\to ۸}\frac{۸(\sqrt{x+۱}-۳)}{۲۴(x-۸)}=\frac{۱}{۳}\lim_{x\to ۸}\frac{x+۱-۹}{(x-۸)(\sqrt{x+۱}+۳)}=\frac{۱}{۱۸}$$

۶ گزینه ۱ درست است.

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|\sin ۲x}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{-x(۲x)}{x^{۲}}=-۲\Rightarrow a-۱=-۲\Rightarrow a=-۱$$

۷ گزینه ۲ درست است.

الف) $\lim_{x\to ۲^+}f(x)=۱\,,\ \lim_{x\to ۲^-}f(x)=-۱\,,\ |f(۲)|=|-۱|=۱\lim_{x\to ۲}|f(x)|$ ✗

پ) $\lim_{x\to ۲}[|f(x)|]=۰\neq[|f(۲)|]$ ✓

پ) $[f(۰)]=۰=\lim_{x\to ۰}[f(x)]$ ✗

ت) $[f(-۱)]=۱\neq\lim_{x\to -۱}[f(x)]=۰$ ✓

۸ گزینه ۴ درست است.

هر چهار تابع در $x=۰$ حد دارد و حد آنها برابر صفر است.

$D_{\sqrt{x}}=[۰,+\infty)\Rightarrow\lim_{x\to ۰^+}\sqrt{x}=۰$ ✗

$D_{\sqrt{x-x^{۲}}}=[۰,۱]\Rightarrow\lim_{x\to ۰^+}\sqrt{x-x^{۲}}=۰$ ✗

$D_{\sqrt{x^{۲}-x}}=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty)\Rightarrow\lim_{x\to ۰^-}\sqrt{x^{۲}-x}=۰$ ✗

$D_{\sqrt{x^{۳}-x}}=(-\infty,-۱]\cup\{۰\}\cup[۱,+\infty)\Rightarrow\lim_{x\to ۰^+}\sqrt{x^{۳}-x}\,,\ \lim_{x\to ۰^-}\sqrt{x^{۳}-x}$ وجود ندارد

۹ . گزینه ۳ درست است.

در گزینه‌های دیگر در $x=0$ حد چپ دارد و تنها در گزینه ۳ تابع حد چپ ندارد.

$$\lim_{x\to 0^-}[x]=-1\,,\quad \lim_{x\to 0^-}\sqrt{-x}=0$$

۱۰ . گزینه ۳ درست است.

۱) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-\sqrt{x}}{x^2-1}=\frac{5}{4}$

۲) دامنه $[1,+\infty)$ و x نمی‌تواند به سمت $-\infty$ میل کند.

۳) $\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin x+1}{\cos x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

۴) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-(2\cos x-1)(\cos x+2)}{2\cos x-1}=-\frac{5}{2}$

۱۱ گزینه ۳ درست است.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x+\sqrt{(3x-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(3x+|3x-\frac{1}{3}|\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(3x-3x+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

۱۲ گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x\to\pi^+}f(x)=\lim_{x\to\pi^+}[-\sin x]=[-(0^-)]=[0^+]=0$$

$$\lim_{x\to\pi^-}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}[-\sin x]=[-(0^+)]=[0^-]=-1$$

$f(0)=0$ (رد گزینه ۱) مقدار تابع

چون $\lim_{x\to\pi^+}f(x)=f(\pi)$ پس تابع در $x=\pi$ پیوستگی راست دارد.

۱۳. گزینه ۱ درست است.

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^3-8x^2+2x-16}{6\sqrt[3]{x}-12}=\frac{0}{0}=\lim\frac{x^2(x-8)+2(x-8)}{6(\sqrt[3]{x}-2)}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(x^2+2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{6(x-8)}=\frac{66\times 12}{6}=132$$

۱۴. گزینه ۲ درست است.

تقسیم بر عامل صفرساز

$$\lim_{\substack{x\to(-2)^-\\ -3<x<-2}} \frac{x^4+4x-8}{x^2+2\left[\frac{1}{2}x\right]} = \lim \frac{(x+2)(x^3-2x^2+4x-4)}{x^2-4}$$

$$-\frac{3}{2}<\frac{1}{2}x<-1 \to \left[\frac{1}{2}x\right]=-2$$

$$= \lim_{x\to(-2)^-} \frac{x^3-2x^2+4x-4}{x-2} = \frac{-28}{-4} = 7$$

۱۵. گزینه ۳ درست است.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-f}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1^+)}} \leftarrow$$ زیر رادیکال تعریف نشده

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{1-f}} = \frac{1}{\sqrt{1-1^-}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = +\infty \Rightarrow$$

$x=0$

۱۶. گزینه ۳ درست است.

$$t = f(x)+f([x])$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f([x]) = f(2) = 2/5 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1/5^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} t = 4^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} [f(x)+f([x])] = \lim_{t\to 4^+} [t] = 4$$

۱۷. گزینه ۳ درست است.

از آنجایی که $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$ است، داریم:

$$x\to 0^+ \Rightarrow \tan(x+\frac{\pi}{4}) > \cot(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow L_1 = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2\cot 2(x+\frac{\pi}{4})}{a\sin x} = \lim -\frac{-2\tan 2x}{a\sin x} = \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$L_2 = -a+b = -2+b = 2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a+b = 6$$

۱۸. گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+x}\sim-\sqrt{9}(x+\frac{1}{18})\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x-3x^2-\frac{1}{6}x}{4x+1-3x+4}=\frac{5}{6}$$

۱۹. گزینه ۴ درست است.

$$-1\notin D_f\Rightarrow-1+c=0\Rightarrow c=1$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=0\Rightarrow 4x^3+ax^2+bx+1=(x+1)^2(mx+n)\Rightarrow m=4,n=1\Rightarrow 4+a+b+1=4\times5$$

$$a+b=15\Rightarrow a+b+c=16$$

۲۰. گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=2$$

۲۱ . گزینه ۱ درست است.

$$\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}}{2-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{7}{4}}=-\frac{2}{7}$$

۲۲ گزینه ۳ درست است.

می‌بایست x^2+ax+b در ۲ و ۳ صفر شود پس $a=-5$ و $b=6$ و $a+b=1$ است.

۲۳ گزینه ۳ درست است.

ابتدا نقاط ناپیوستگی در بازهٔ $(-2,2)$ و سپس پیوستگی چپ در $x=2$ و پیوستگی راست در $x=-2$ را بررسی می‌کنیم:

۱) نقاط ناپیوستگی در بازه $(-2,2)$ مربوط به اعدادی است که کل عبارت داخل جزء صحیح را عدد صحیح می‌کند:

$$-2<x<2\to-10<5x<10$$

$$5x=-9,-8,\dots,0,\dots,8,9$$

$$x=\underbrace{\frac{-9}{5},\frac{-8}{5},\dots,0,\dots,\frac{8}{5},\frac{9}{5}}_{\text{۱۹ عدد برای ناپیوستگی}}$$

۲) بررسی پیوستگی چپ در $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{الف)}\ \lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}[5x]=9\\ \text{ب)}\ f(2)=10\end{array}\right\}\Rightarrow \text{در } x=2 \text{ ناپیوسته است}$$

۳) بررسی پیوستگی راست در $x=-2$

$$\left.\begin{array}{l}\text{الف)}\ \lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}[5x]=-10\\ \text{ب)}\ f(-2)=-10\end{array}\right\}\Rightarrow \text{در } x=-2 \text{ پیوستگی راست دارد}$$

نتیجه: این تابع در ۲۵ نقطه از بازه مورد نظر ناپیوسته است.

۲۴. گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})\times\frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x-x^2+3x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x}{|x|+|x|}$$

$$=\begin{cases}\nearrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x}=3=m\\ \searrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x}{-2x}=-3=n\end{cases}$$

$$m-n=3-(-3)=6$$

۲۵ گزینه ۱ درست است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^3+7x^n}{2x^n+5x-7}\begin{cases}\xrightarrow{n>3}\approx\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x^n}{2x^n}=\frac{7}{2}=3/5\\ \xrightarrow{n=3}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-x^3+7x^3}{2x^3+5x-7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+6x^3}{2x^3+5x-7}\approx\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{6x^3}}{\cancel{2x^3}}=3\\ \xrightarrow{n<3}\approx\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{2x^n+5x-7}=-\infty\ ;\ n=1\ \text{یا}\ 2\end{cases}$$

۲۶ گزینه ۲ درست است.

تابع $f(x)$ را به صورت $f(x)=3([x]+[-x])+(2a-4)[-x]$ می‌نویسیم و داریم:

$$\begin{cases}2a-4=0\Rightarrow a=2\\ b=\lim\limits_{x\to4}f(x)=3\times-1=-3\end{cases}\Rightarrow a+b=-1$$

۲۷ گزینه ۴ درست است.

باید حد تابع $f(x)$ در $x=2$ یا مقدار تابع در $x=2$ برابر باشد:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+a}{x-2}=\frac{0}{0}\Rightarrow 8+a=0\Rightarrow a=-8$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}}=12\Rightarrow f(2)=12\Rightarrow 2b+2=12\Rightarrow b=5$$

بنابراین $a-b=-13$ است.

۲۸. گزینه ۴ درست است.

می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم $P(P(x))$ بر $x-4$ برابر $P(P(4))$ است. پس:

$$P(x)=(x^2-6x+8)Q(x)+3x-10 \Rightarrow P(4)=0\times Q(4)+2 \Rightarrow P(4)=2$$
$$P(P(4))=P(2)=0\times Q(2)+(-4)$$

۲۹. گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{4x+\sqrt{2x}}-6}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{4x+\sqrt{2x}}-6}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt{4x+\sqrt{2x}}+6}{12}\times\frac{12}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$=\lim\frac{4x+\sqrt{2x}-36}{x-8}\times\frac{(4x-36)-\sqrt{2x}}{-8}=\lim\frac{(4x-36)^2-2x}{-8(x-8)}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{\cancel{(x-8)}(16x-162)}{-8\cancel{(x-8)}}=\frac{-34}{-8}=\frac{17}{4}$$

۳۰. گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x\to\pi}(a+b\cos x)=0 \Rightarrow a+b(-1)=0 \Rightarrow a=b$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{a-4}{a+a\cos x}=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pi}\left(\frac{a-4}{a}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)=-\infty$$

می‌دانیم $\lim_{x\to\pi}\frac{1}{1+\cos x}=+\infty$ می‌باشد، پس $\frac{a-4}{a}<0$ است و داریم:

$\frac{a-4}{a}<0 \Rightarrow 0<a<4 \Rightarrow 0<b<4 \Rightarrow$ ۳ مقدار صحیح برای b وجود دارد.

۳۱. گزینه ۴ درست است.

تابع $f(x)$ در نقاط $x=-2$ و $x=4$ ناپیوسته است پس باید در نقاط $x=0$ و $x=3$ پیوسته باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{a}{-4}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow \frac{a}{-4}=-\frac{1}{4} \Rightarrow a=1$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\frac{5}{-5}=-1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=\frac{b}{-1}\end{cases} \Rightarrow -1=\frac{b}{-1} \Rightarrow b=1$$

بنابراین $a+b=2$ می‌باشد.

۳۲. گزینه ۱ درست است.

به ازای $x=۲$ داریم:

$$۰\times p(۲)=۸-۱۶+a\Rightarrow a=۸$$

حال $p(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$p(x)=\frac{x^۳-۸x+۸}{x-۲}=x^۲+۲x-۴$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۲$ که برابر $p(۲)$ می‌باشد برابر است با:

$$p(۲)=۴+۴-۴=۴$$

۳۳ گزینه ۲ درست است.

در $x\to ۲^+$، نمودار $y=x^۲$ بالای نمودار $y=۲^x$ است. پس $۲^x-x^۲$ برابر ۰^- است، پس:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x+۱}{۲^x-x^۲}=\frac{۷}{۰^-}=-\infty$$

۳۴. گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\frac{۰}{۰}\Rightarrow\lim_{x\to ۰}\frac{۸\sin^۲x}{۲\sin^۲x}=۴$$

$$f(۰)=۴\Rightarrow m+۱=۴\Rightarrow m=۳$$

۳۵ . گزینه ۲ درست است.

چون در $\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{ax+b}=\frac{۱}{۴}$ ، حد صورت برابر صفر است پس حد مخرج نیز باید صفر باشد، پس:

$$\lim_{x\to ۲}(ax+b)=۰\Rightarrow ۲a+b=۰$$

از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{ax+b}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-(x+۲)}{۴a(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۱)}{۴a(x-۲)}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۴a}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow a=۳$$

حال حاصل $\lim_{x\to -\infty}\frac{ax-\sqrt{x^۲+۲x+۳}}{۲x+۵}$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{ax-|x|}{۲x}=\frac{(a+۱)x}{۲x}=\frac{a+۱}{۲}=\frac{۳+۱}{۲}=۲$$

۳۶ گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳۷ گزینه ۳ درست است.

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x-1}{ax^2+bx-12}=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{7}{a(x-2)^2}=-\infty\Rightarrow 4a=-12\Rightarrow a=-3\Rightarrow b=12$$

$$\lim_{x\to+\infty}bxf(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x(4x-1)}{-3x^2+12x-12}=\lim_{x\to+\infty}\frac{48x^2}{-3x^2}=-16$$

۳۸. گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4-2+a=2+a\\ f(2)=6-g(1)=6-(-\frac{1}{a})=6+\frac{1}{a}\end{cases}\Rightarrow 2+a=6+\frac{1}{a}\Rightarrow a-\frac{1}{a}=4\Rightarrow a^2-4a-1=0$$

$\Rightarrow$ حاصل ضرب مقادیر a $=-1$

۳۹. گزینه ۴ درست است.

$$f(x)=[x]-[-x]$$

$$\lim_{x\to 1^-}([x]-[-x])=[1^-]-[-(1^-)]=0-(-1)=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}([x]-[-x])=[1^+]-[-(1^+)]=1-(-2)=3$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)+\lim_{x\to 1^+}f(x)=1+3=4$$

۴۰. گزینه ۳ درست است.

$$f(x)=2[x+\frac{1}{3}]-1$$

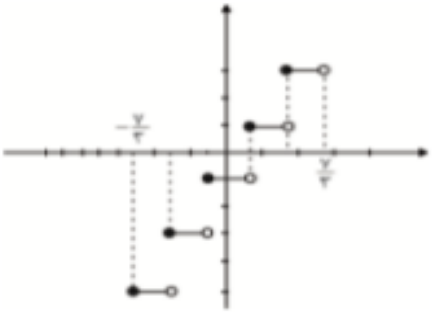
$$-\frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\leftarrow 0\le x+\frac{1}{3}<1\Rightarrow[x+\frac{1}{3}]=0\to y=-1$$

$$\frac{2}{3}\le x<\frac{5}{3}\leftarrow 1\le x+\frac{1}{3}<2\Rightarrow[x+\frac{1}{3}]=1\to y=1$$

$$\frac{5}{3}\le x<\frac{8}{3}\leftarrow 2\le x+\frac{1}{3}<3\Rightarrow[x+\frac{1}{3}]=2\to y=3$$

$$-\frac{4}{3}\le x<-\frac{1}{3}\leftarrow -1\le x+\frac{1}{3}<0\Rightarrow[x+\frac{1}{3}]=-1\to y=-3$$

$$-\frac{7}{3}\le x<-\frac{4}{3}\leftarrow -2\le x+\frac{1}{3}<-1\Rightarrow[x+\frac{1}{3}]=-2\to y=-5$$



تابع در نقاط $-\frac{4}{3}$ و $-\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{3}$ ناپیوسته است.

۴۱. گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} ax+۲b = ۳a+b = ۶$$

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} ax^۲+bx+۲ = ۹a+۳b+۲ = ۲$$

$$-۳\begin{cases} ۳a+۲b=۶ \\ ۹a+۳b=۰ \end{cases} \Rightarrow -۳b=-۱۸ \Rightarrow b=۶ \Rightarrow a=-۲$$

$$a+b=۴$$

۴۲. گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = [(-۲)^+]^۲ - [(-۲)^+] = ۴-(-۲) = ۶$$

$f(-۲) = [(-۲)]^۲ - [(-۲)] = ۴-(-۲) = ۶$ در ۲- پیوستگی راست دارد

$\lim_{x\to -۱^+} f(x) = [(-۱)^+]^۲ - [(-۱)^+] = ۱-(-۱) = ۲ = f(-۱)$ در ۱- ناپیوسته است

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x) = [(-۱)^-]^۲ - [(-۱)^-] = ۴-(-۲) = ۶$$

$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = [(۰^-)]^۲ - [۰^-] = ۱+۱ = ۲$ در صفر ناپیوسته

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = [(۰^+)]^۲ - [(۰^+)] = ۰$$

$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = [۱^-]^۲ - [۱^-] = ۰$, $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = [۱^+]^۲ - [۱^+] = ۰ = f(۱)$ در ۱ پیوسته

$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = [۲^-]^۲ - [۲^-] = ۰$, $f(۲) = [۲]^۲ - [۲] = ۲$ در ۲ ناپیوسته

۴۳ . گزینه ۱ درست است.

$$x \to -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x+\frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲x+۱ = ۰$$

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{x^۲}{(۲x+۱)^۲} = +\infty \Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱ = ۴x^۲+ax+b \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ b=۱ \end{cases}$$

$$a+b = ۴+۱ = ۵$$

۴۴. گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{۵^n\left(\cancel{(\frac{۲}{۵})^n} + \cancel{(\frac{۳}{۵})^n} + \cancel{(\frac{۴}{۵})^n} + ۱\right)} = \lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{۵^n} = ۵$$

۴۵. گزینه ۱ درست است.

ابتدا با ضرب عبارت سه جمله‌ای (چاق) از طریق اتحاد چاق و لاغر رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{5+\sqrt{x+1}}-2}{\sqrt{2x}-4}=+\times\underbrace{\frac{\sqrt[3]{(5+\sqrt{x+1})^2}+2\sqrt[3]{5+\sqrt{x+1}}+4}{\sqrt[3]{(5+\sqrt{x+1})^2}+2\sqrt[3]{5+\sqrt{x+1}}+4}}_{\text{حد این عبارت وقتی } x\to 8 \text{ برابر ۱۲ است}}$$

مزدوج

$$\lim_{x\to 8}\frac{5+\sqrt{x+1}-8}{(\sqrt{2x}-4)\times 12}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{12(\sqrt{2x}-4)}\times\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3}\times\frac{\sqrt{2x}+4}{\sqrt{2x}+4}$$

مزدوج

$$\lim_{x\to 8}\frac{\cancel{(x-8)}(8)}{12(2\cancel{(x-8)}(6)}=\frac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{24}_{3}\times 6}=\frac{1}{18}$$

۴۶. گزینه ۴ درست است.

اگر $n>3 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{8x^n}{2x^n}=4$

اگر $n=3 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+8x^3}{2x^3}=3$

اگر $n<3$ (n طبیعی است)
$$\begin{cases} n=2 \to \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty \\ \text{یا} \\ n=1 \to \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3}{7x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{7}x^2=-\infty \end{cases}$$

۴۷ گزینه ۴ درست است.

تابع $y=[x]$ فقط در نقاط صحیح بازه مورد نظر به‌جز $x=-3$ (که پیوستگی راست دارد) یعنی $x=-2,-1,0,1,2,3$ ناپیوسته است. اما چون عبارت x^3-x در سه نقطه $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ صفر می‌شود، مشکل ناپیوستگی در این نقاط را رفع کرده و f در آن‌ها پیوسته می‌شود. بنابراین تابع $f(x)$ فقط در سه نقطه $x=-2$ و $x=2$ و $x=3$ ناپیوسته است.

۴۸ گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x-1}{a(x-2)^2}=-\infty \xrightarrow{\text{باید } a<0} \lim_{x\to 2}\frac{7}{ax^2-4ax+4a}=-\infty \to 4a=-12 \to \boxed{a=-3} \to -4a=b \to \boxed{b=12}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(b-a)x\times\frac{4x-1}{-3x^2+12x-12}=\lim_{x\to+\infty}\frac{60x^2-15x}{-3x^2+12x-12}=\lim_{x\to+\infty}\frac{60x^2}{-3x^2}=-20$$

۴۹. گزینه ۴ درست است.

$$f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x^2+5x-3}\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2\to y=2$$ مجانب افقی

اکنون باید بررسی کنیم که تابع در همسایگی مجانب افقی در $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$ آیا با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به آن نزدیک می‌شود یا با مقادیر کوچک‌تر از ۲؟ برای این کار دو برابر مخرج را در صورت ظاهر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2(x^2+5x-3)-13x+7}{x^2+5x-3}$$

تفکیک ↓

$$f(x)=2+\frac{7-13x}{x^2+5x-3}$$

وقتی $x\to+\infty$: $\frac{7-13x}{x^2+5x-3}\approx 0^-\Rightarrow f(x)\to 2^-$ (۱)

وقتی $x\to-\infty$: $\frac{7-13x}{x^2+5x-3}\approx 0^+\Rightarrow f(x)\to 2^+$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow$ $y=2$

۵۰. گزینه ۴ درست است.

برای آن‌که حاصل حد فوق، بی‌نهایت شود، باید $x=a$ مخرج کسر را صفر کند:

$$\left|2\cos 2a-2\cos a-\sin^2 a\right|=0\Rightarrow 2\cos 2a-2\cos a-\sin^2 a=0$$

با استفاده از روابط $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ و $\sin^2 a=1-\cos^2 a$ داریم:

$$2(2\cos^2 a-1)-2\cos a-(1-\cos^2 a)=0$$

$$\Rightarrow 5\cos^2 a-2\cos a-3=0\xrightarrow{\cos a=t}5t^2-2t-3=0\Rightarrow t=1,\frac{-3}{5}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos a=1\xrightarrow{a\in[0,2\pi]}a=0,2\pi\\ \cos a=\frac{-3}{5}\xrightarrow{a\in[0,2\pi]}\end{cases}$$

a دارای دو جواب درست به صورت‌های $\pi\pm\alpha$ در ربع‌های دوم و سوم است

پس مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با:

$$0+2\pi+(\pi-\alpha)+(\pi+\alpha)=4\pi$$

۵۱ گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\sqrt{2x+1}\left(3-\sqrt{8x-1}\right)}{ax^n-1}\xrightarrow{\text{هم ارزی پرتوان}}-\frac{x^3\sqrt{2x}\left(-\sqrt{8x}\right)}{ax^n}=$$

$$\frac{-x^3\sqrt{16x^3}}{ax^n}=\frac{-x^3|4x|}{ax^n}=\frac{-4x^4}{ax^n}$$

برای آن‌که حاصل این حد برابر با ۸ شود، باید:

$$\begin{cases}n=4\\ \frac{-4}{a}=8\Rightarrow a=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

پس باید حاصل حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^-}\left(\left[\frac{1}{x}\right]+[-2x]\right)=\left[\overset{+}{-2}\right]+\left[\overset{+}{1}\right]=-2+1=-1$$

۵۲ گزینه ۴ درست است.

چون $\lim_{x\to3}\frac{x-1}{f(x)}=+\infty$ پس $f(x)$ حتماً دارای ریشه مکرر از مرتبه زوج $x=3$ است، یعنی این تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=(x-3)^2h(x)$$

از آن‌جا که $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه ۵ است، $h(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه ۳ است و برای آن حالات زیر متصور است:

حالت۱: $h(x)$ دارای یک ریشه ساده باشد ← $f(x)$ دارای یک ریشه مضاعف $x=3$ و یک ریشه ساده است.

حالت۲: $h(x)$ دارای سه ریشه ساده باشد ← $f(x)$ دارای یک ریشه مضاعف $x=3$ و سه ریشه ساده است.

حالت۳: $h(x)$ دارای یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده باشد ← $f(x)$ دارای دو ریشه مضاعف $x=3$ و $x=\alpha$ و یک ریشه ساده است.

حالا به تابع $g(x)=f(x)\left[\frac{x}{3}\right]$ دقت کنید.

در حالت کلی این تابع در نقاطی که داخل براکت را عدد صحیح می‌کنند، مشتق ناپذیر است $(x=3,6,9)$ ولی اگر نقطه موردنظر، ریشه مکرر پشت براکت یعنی تابع $f(x)$ باشد، به جمع نقاط مشتق‌پذیر برمی‌گردد.

پس تا اینجا تابع g حتماً در نقاط صحیح $x=1,2,4,5,7,8$ (۶نقطه) مشتق‌پذیر است و از آن‌جا که در تمام حالات بررسی شده، $x=3$ ریشه مضاعف تابع f است، این نقطه نیز به جمع نقاط مشتق‌پذیر برگشته و کلاً ۷ نقطه صحیح مشتق‌پذیر قطعی داریم.

اما در مورد نقاط $x=6$ و $x=9$ به حالات در نظر گرفته شده برای توابع h و f دقت کنید:

در حالت‌های ۱ و ۲ دیدیم که تابع f فقط دارای یک ریشه مضاعف $x=3$ است و لذا $x=6,9$ مشتق ناپذیراند و همان ۷ نقطه صحیح مشتق پذیر را داریم.

در حالت ۳، تابع f علاوه بر $x=3$ ، دارای ریشه مضاعف در $x=\alpha$ است ، اگر $\alpha\neq6,9$ باشد، همچنان $x=6,9$ مشتق ناپذیر بوده و بازهم ۷ نقطه صحیح مشتق پذیر داریم. اما اگر ۹ یا $\alpha=6$ باشد، علاوه بر $x=3$ ، ۹ یا $x=6$ هم به جمع نقاط مشتق پذیر برمی‌گردد و تعداد نقاط صحیح مشتق پذیر ۸ می‌شود که این عدد، ماکزیمم تعداد آن‌ها است.

ضمناً تابع f می‌تواند به‌صورت $f(x)=(x-3)^4h(x)$ نیز باشد که در این صورت $h(x)$ از درجه ۱ بوده و دارای یک ریشهٔ ساده است و مانند حالت ۱ در بالا خواهد شد.

۵۳ گزینه ۲ درست است.

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\left(\sin^2 x+\sin x.\cos x+\cos^2 x\right)}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)(1+\sin x.\cos x)}{\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x.\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{(\sin x-\cos x)}(1+\sin x.\cos x)(\sin x.\cos x)}{\cancel{(\sin x-\cos x)}(\sin x+\cos x)}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$B=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3+\sqrt[3]{x}}-2}{x^3-1}\times\frac{\sqrt{3+\sqrt[3]{x}}+2}{\sqrt{3+\sqrt[3]{x}}+2}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{(x^3-1)\times4}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)\times4\times3}=\frac{1}{36}$$

$$B^{-1}\times A^{-2}=36\times\frac{32}{9}=128$$

۵۴ گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=0\times0=0\\ \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=(-1)\times1=-1\Rightarrow\\ f(2)=0\times0=0\end{cases}$$

f در $x=2$ ناپیوسته است (فقط پیوستگی راست دارد.)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=0\times(-1)=0\\ \lim\limits_{x\to3^-}f(x)=(-1)\times0=0\Rightarrow\\ f(3)=0\times(-1)=0\end{cases}$$

f در $x=3$ پیوسته است.

۵۵ گزینه ۱ درست است.

باید مخرج در $x=1$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$2x^2+ax+b=2(x-1)^2=2x^2-4x+2\rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=2\end{cases}$$

تجزیه با استفاده از تقسیم بر عامل صفر ساز $(x+2)$

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^3-4x^2-18x+4}{x^2-6x-16}=\lim_{x\to-2}\frac{\cancel{(x+2)}(3x^2-10x+2)}{\cancel{(x+2)}(x-8)}=\frac{34}{-10}=-3/4$$

راه دوم: قاعده هوپیتال

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^3-4x^2-18x+4}{x^2-6x-16}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-2}\frac{9x^2-8x-18}{2x-6}=\frac{34}{-10}=-3/4$$

۵۶ گزینه ۳ درست است.

$$\lim_{x\to0^+}(f+g)(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)+\lim_{x\to0^+}g(x)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[1-x^3\right]+\lim_{x\to0^+}\frac{3(\sqrt{x+1}-1)}{ax}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=0+\lim_{x\to0^+}\frac{3\cancel{x}}{a\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\frac{3}{2a}$$

$$\lim_{x\to0^-}(f+g)(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)+\lim_{x\to0^-}g(x)$$

$$=\lim_{x\to0^-}\left[1-x^3\right]+\lim_{x\to0^-}(2b[x]+3\sin\frac{\pi[x]}{2})=1-2b-3=-2b-2$$

۵۷ گزینه ۳ درست است.

تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=(x-2)(x-3)(x+2)^2\left[\frac{x}{2}\right]$$

دربازهٔ $(-5,3)$ فاصله صحیح $x=-4,-2,0,2$ نقاطی هستند که داخل براکت را صحیح می‌کنند و کاندیدای ناپیوستگی و مشتق‌ناپذیری هستند و از بین این نقاط:

$x=-4,0$ چون هیچ عامل صفر شونده‌ای در پشت براکت ندارند، ناپیوسته و مشتق ناپذیر باقی می‌مانند.

$x=2$ چون ریشهٔ ساده پشت براکت است، پیوسته می‌شود ولی همچنان مشتق‌ناپذیر است.

$x=-2$ چون ریشهٔ مکرر پشت براکت است، به جمع نقاط پیوسته و مشتق‌پذیر برمی‌گردد.

دقت کنید! علاوه‌بر این نقطه، نقاط صحیح $x=-3,-1,1$ اساساً داخل برکت را صحیح نمی‌کنند و پیوسته و مشتق‌پذیرند.

پس این تابع در یک نقطهٔ صحیح $x=2$ پیوسته و مشتق ناپذیر است $\leftarrow n=1$

و در چهار نقطهٔ صحیح $x=-3,-2,-1,1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است $\leftarrow m=4$

$$m-n=4-1=3$$

۵۸ گزینه ۳ درست است.

چون حاصل حد برابر با عدد $\sqrt{۳}$ شده، از آنجا که مخرج کسر به صفر میل می‌کند، پس صورت هم باید به صفر میل کند. یعنی:

$$f^{-۱}(۴)-f(۷)=۰ \Rightarrow f(۷)=f^{-۱}(۴)$$

حالا برای محاسبه حد خواسته شده داریم:

$$\lim_{x\to ۷} fof(x)=fof(۷)=fof^{-۱}(۴)=۴$$

۵۹. گزینه ۱ درست است.

می‌دانیم که به‌ازای هر عدد حقیقی x داریم:

$$f(x-۳)-f(x+۳)=۰ \Rightarrow f(x-۳)=f(x+۳) \xrightarrow{x-۳=X} f(x)=f(x+۶)$$

پس تابع f متناوب با دوره تناوب ۶ است.

برای محاسبه $\lim_{x\to ۱^+} \frac{f(۲x+۳)-f(x-۸)}{x^۲-۱}$ ، مخرج کسر، صفر حدی است و در صورت کسر، داریم:

$$f(۲x+۳)-f(x-۸) \xrightarrow{x=۱^+} = f(\overset{+}{۵})-f(\overset{+}{-۷})$$

گفتیم که تابع f متناوب با دورهٔ تناوب ۶ است، پس $f(x)=f(x+۶)$، یعنی مثلاً $f(\overset{+}{-۷})=f(\overset{+}{-۱})=f(\overset{+}{۵})=...$

پس $f(\overset{+}{-۷})=f(\overset{+}{۵})$ و لذا $f(\overset{+}{۵})-f(\overset{+}{-۷})$ برابر صفر واقعی (مطلق) است و حاصل حد برابر صفر می‌شود.

خیلی سبز!
آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

تست و پاسخ ۱

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\\ 2 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ در چند نقطه از بازهٔ $(-3,3)$ حد ندارد؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره حواستان باشد در حد f وقتی $x\to a$ با $f(a)$ کاری نداریم.

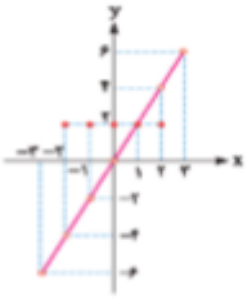
خودت حل کنی بهتره توابع به فرم $\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، حدشان در تمام نقاط را از ضابطهٔ مربوط به $x\notin\mathbb{Z}$ حساب می‌کنیم.

نکته به شرط پیوستگی توابع g و h در مورد تابع به فرم $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\in\mathbb{Z}\\ h(x) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، داریم:

۱	f در چه نقاطی حد ندارد؟	در تمام نقاط حد دارد.
۲	f در چه نقاطی ناپیوسته است؟	در نقاط صحیح به‌جز جواب‌های معادلهٔ $g(x)=h(x)$

پاسخ تشریحی راه اول، با توجه به نکتهٔ بالا، چون تابع $y=2x$ در همهٔ نقاط حد دارد، پس تابع $f(x)=\begin{cases}2x & x\notin\mathbb{Z}\\ 2 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ در تمام نقاط حد دارد.

راه دوم، گام اول: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x & x\notin\mathbb{Z}\\ 2 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ با دامنهٔ $-3<x<3$ را رسم می‌کنیم:



گام دوم، با توجه به نمودار رسم‌شده، f در تمام نقاط حد دارد.

تذکر ۱) f در این بازه در نقاطی به طول -2، -1، ۰ و ۲ ناپیوسته است.

۲) اگر بازه به جای $(-3,3)$، بازهٔ $[-3,3]$ بود، f در $x=-3$ و $x=3$ حد نداشت، چون از یک طرف همسایگی نداشت.

تست و پاسخ ۲

حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{[x]-\sin^2 x}{1+\cos(x+\frac{\pi}{2})}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره در این مدل سؤالات، اول تکلیف براکت‌ها را معلوم کنید.

خودت حل کنی بهتره در صورت از اولین اتحادی که در مثلثات یاد گرفته‌اید، استفاده کنید.

درس‌نامه روش‌های حل حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

روش حل	چه جوری حل می‌کنیم	مثال
به کمک تجزیه	باید در صورت و مخرج عامل صفرکنندهٔ $x-a$ را پیدا کنیم و آن را ساده کنیم.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{4}{-1}=-4$
به کمک تقسیم	عبارتی که راحت تجزیه نمی‌شود را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^3-x^2-4}^{\text{بر } x-2 \text{ تقسیم می‌کنیم}}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{8}{4}=2$
به کمک اتحادهای مثلثاتی	از اتحادهای مثلثاتی $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ و $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ و ... استفاده می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overbrace{\cos^2 x}^{1-\sin^2 x}}{1-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}=1+1=2$

نکته ۱

۱	اگر در حدمان عبارت قدرمطلقی داشتیم، باید اول داخل آن را تعیین علامت کنیم. اگر مثبت بود، خودش بیرون می‌آید و اگر منفی بود، قرینه‌اش.
۲	اگر در حدمان عبارت براکتی داشتیم، باید داخل آن را تعیین مقدار کنیم و جایش عدد قرار دهیم.

۲) $\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تکلیف عبارت براکتی را معلوم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1+\cos(x+\frac{\pi}{2})}\qquad [\frac{\pi}{2}]=[1/57]=1$$

پس حدمان به شکل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1+\cos(x+\frac{\pi}{2})}$ شد.

گام دوم: در صورت از اتحاد مزدوج و در مخرج از نکتهٔ ۲ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\underbrace{1+\cos(x+\frac{\pi}{2})}_{-\sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}=1+\sin\frac{\pi}{2}=1+1=2$$

تست و پاسخ ۳

حدهای راست و چپ تابع $f(x)=x[x]-[x]^2$ در دو نقطه، ۳ واحد اختلاف دارند. فاصلهٔ بین این دو نقطه کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره طول نقطهٔ مورد نظر حتماً عددی صحیح است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=x[x]-[x]^2 \xrightarrow{\text{فاکتور از } [x]} f(x)=[x](x-[x])$$

گام دوم: الان باید حد راست و چپ تابع f را در نقطه‌ای به طول a حساب کنیم. برای a دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: a عددی صحیح باشد:

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست}: [a^+](a-[a^+]) = a(\underbrace{a-a}_{0}) = 0 \\ \text{حد چپ}: [a^-](a-[a^-]) = (a-1)(\underbrace{a-(a-1)}_{1}) = a-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اختلاف}} |0-(a-1)| = |a-1|$$

حالت دوم: a عددی غیرصحیح باشد: در صورت حد راست و چپ تابع در a یکسان می‌شود و اختلافشان صفر است.

پس حالت اول قبول است.

گام سوم: $|a-1|$ باید برابر با ۲ باشد:

$$|a-1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} a-1 = 2 \Rightarrow a = 3 \\ a-1 = -2 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

گام چهارم: مختصات دو نقطه را به دست می‌آوریم:

- $x = 3 \Rightarrow f(3) = 3[3] - [3]^2 = 0 \xrightarrow{\text{نقطه}} A(3,0)$
- $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1[-1] - [-1]^2 = 0 \xrightarrow{\text{نقطه}} B(-1,0)$

گام پنجم: فاصلهٔ A تا B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

تست و پاسخ ۴

اگر $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x+1}$ و $g(x) = a[-x]$ به طوری که $f+g$ در $x=-1$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲ ۲) ۲− ۳) ۴ ۴) ۴−

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره حد راست و حد چپ $f+g$ در $x=-1$ را برابر قرار دهید.

درس‌نامه چه وقت‌هایی برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a} f(x)$، باید حد راست و چپ را چک کنیم؟

	نقاط مهم	مثال	بررسی حد وقتی $x \to 1$
چندضابطه‌ای	مرز دامنه‌ها	$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & x>1 \\ 2x-3 & x<1 \end{cases}$	$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست}: 1^2+2=3 \\ \text{حد چپ}: 2(1)-3=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ حد ندارد
قدرمطلق	ریشه‌های قدرمطلق (در حالت $\frac{0}{0}$)	$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{\lvert x-1\rvert}$	$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{x-1}} = 4 \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{-\cancel{(x-1)}} = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow$ حد ندارد
براکتی	داخل براکت عدد صحیح شود.	$f(x) = [2x] - [x]$	$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست}: [2^+]-[1^+] = 2-1 = 1 \\ \text{حد چپ}: [2^-]-[1^-] = 1-0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ حد $= 1$

نکته برای آن‌که تابع f در $x=a$ حد داشته باشد باید حد راست و چپ آن در a موجود و برابر باشند.

پاسخ تشریحی گام اول: تابع $f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{|x^2-1|}{x+1} + a[-x]$$

گام دوم، حد راست و چپ تابع $f+g$ در $x=-1$ را حساب می‌کنیم:

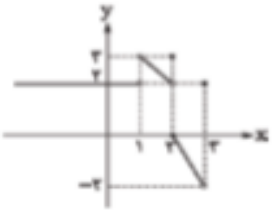
حد راست: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\frac{\overbrace{|x^2-1|}^{\text{منفی}}}{x+1}+a[\underbrace{-x}_{-(-0/99)}]\right)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\frac{-(x^2-1)}{x+1}+a[\underbrace{0/99}_{0}]\right)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\frac{-(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}+0\right)=-(-1-1)=2$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\left(\frac{\overbrace{|x^2-1|}^{\text{مثبت}}}{x+1}+a[\underbrace{-x}_{-(-1/01)}]\right)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\left(\frac{(x^2-1)}{x+1}+a[\underbrace{1/01}_{1}]\right)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\left(\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}+a\right)=-2+a$

گام سوم، باید حد راست و چپ برابر باشند: حد چپ = حد راست $\Rightarrow 2=-2+a \Rightarrow a=4$

تست و پاسخ ۵

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ رسم شده است. کدام گزینه صحیح نیست؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) $\lim\limits_{x\to 3^-}|f(x)|=2$

۲) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(5-x)=3$

۳) $\lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)]=3$

۴) $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-}f(\frac{1}{x})=0$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره وقتی $x\to a^-$ آن وقت $-x\to(-a)^+$ و $\frac{1}{x}\to(\frac{1}{a})^+$.

درس‌نامه چندتا میل‌کردن خاص

اگر ...	آن‌گاه ...	
$x\to 0$	$x^2\to 0^+$	$\lvert x\rvert\to 0^+$
$x\to a$	$(x-a)^2\to 0^+$	$\lvert x-a\rvert\to 0^+$
$x\to a^+$	$-x\to(-a)^-$	
$x\to a^-$	$-x\to(-a)^+$	
$x\to a^+$	$b-x\to(b-a)^-$	$x-b\to(a-b)^+$
$x\to a^-$	$b-x\to(b-a)^+$	$x-b\to(a-b)^-$
$x\to a^+$	$\frac{1}{x}\to(\frac{1}{a})^-$	

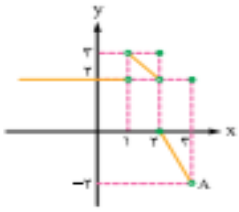
درس‌نامه فرق $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ و $[\lim\limits_{x\to a}f(x)]$

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ باشد، آن‌گاه:

۱	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$	مهم است که حاصل حد بالا L^+ شده یا L^-. هر کدام بود، از آن براکت می‌گیریم.
	مثال	$\lim\limits_{x\to 0}[\cos x]=[1^-]=0$
۲	$[\lim\limits_{x\to a}f(x)]$	خود L مهم است (کاری نداریم L^+ است یا L^-). حاصل حد $[L]$ می‌شود.
	مثال	$[\lim\limits_{x\to 0}\cos x]=[1]=1$

نکته $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|\lim\limits_{x\to a}f(x)|$ (به شرط موجودبودن)

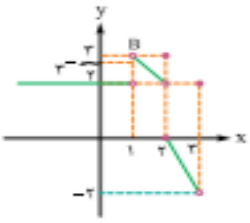
پاسخ تشریحی در هر گام یکی از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



گام اول: $\xrightarrow{\text{با توجه به نقطهٔ A}} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}|f(x)|=|-2|=2$ ✓

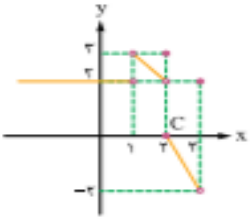
گام دوم: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(\underbrace{5-x}_{5-3^-=1^+})=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \xrightarrow{\text{با توجه به نقطهٔ B}} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ ✓

گام سوم: $\lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)] \xrightarrow{\text{با توجه به نقطهٔ B}}$



$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)]=[3^-]=2$ ✗

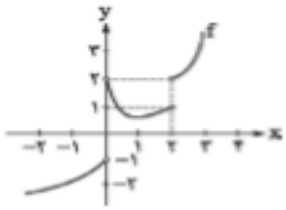
گام چهارم: $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} f(\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \xrightarrow{\text{با توجه به نقطهٔ C}}$



$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$ ✓

گام پنجم: پس فقط ۳ نادرست بود.

تست و پاسخ ۶



با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}[f(1-f(x))]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) -1 ۲) -2

۳) 2 ۴) 1

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره

۴ مرحله داریم: $\underbrace{[\underbrace{f(1-\underbrace{f(2^-)}_{\text{گام ۱}})}_{\text{گام ۲}}]}_{\text{گام ۳}}$ (گام ۴)

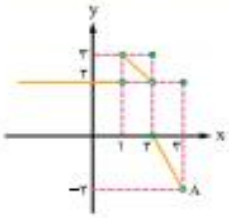
پاسخ تشریحی برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 2^-}[f(1-f(x))]$ جای x، 2^- قرار می‌دهیم و مرحله به مرحله جلو می‌رویم. تا آخرین مرحله باید حواسمان باشد که هر عبارت، یک حد است و اعداد به دست آمده را هم به صورت حدی باید بنویسیم.

پس ما دنبال عبارت روبه‌رو هستیم:

$\underbrace{[\underbrace{f(1-\underbrace{f(2^-)}_{\text{گام ۱}})}_{\text{گام ۲}}]}_{\text{گام ۳}}$ (گام ۴)

نکته $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|\lim\limits_{x\to a}f(x)|$ (به شرط موجودبودن)

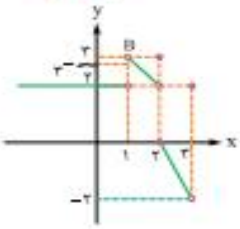
پاسخ تشریحی در هر گام یکی از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



گام اول: $\xrightarrow{\text{با توجه به نقطهٔ A}} \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=-۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳^-}|f(x)|=|-۲|=۲$ ✓

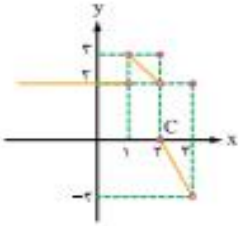
گام دوم: $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(\underbrace{۵-x}_{۵-۳^-=۲^+})=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) \xrightarrow{\text{با توجه به نقطهٔ B}} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۳$ ✓

گام سوم: $\lim\limits_{x\to ۲^+}[f(x)] \xrightarrow{\text{با توجه به نقطهٔ B}}$



$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^+}[f(x)]=[۳^-]=۲$ ✗

گام چهارم: $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^-} f(\frac{۱}{x})=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) \xrightarrow{\text{با توجه به نقطهٔ C}}$

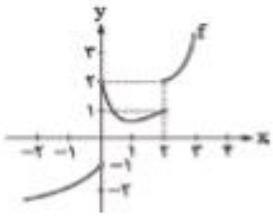


$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۰$ ✓

گام پنجم: پس فقط ۳ نادرست بود.

تست و پاسخ ۶

با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-}[f(۱-f(x))]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) -۱ ۲) -۲

۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره

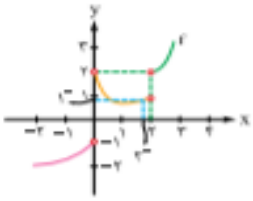
۴ مرحله داریم: $\underbrace{\underbrace{[\underbrace{f(۱-\underbrace{f(۲^-)}_{\text{گام ۱}})}_{\text{گام ۲}}]}_{\text{گام ۳}}}_{\text{گام ۴}}$

پاسخ تشریحی برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to ۲^-}[f(۱-f(x))]$ جای x، ۲^- قرار می‌دهیم و مرحله به مرحله جلو می‌رویم. تا آخرین مرحله باید حواسمان باشد که هر عبارت، یک حد است و اعداد به دست آمده را هم به صورت حدی باید بنویسیم.

پس ما دنبال عبارت روبه‌رو هستیم:

$\underbrace{\underbrace{[\underbrace{f(۱-\underbrace{f(۲^-)}_{\text{گام ۱}})}_{\text{گام ۲}}]}_{\text{گام ۳}}}_{\text{گام ۴}}$

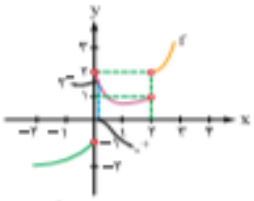
گام اول: $f(2^-)$ یعنی حد چپ f وقتی $x \to 2$ که می‌شود 1^-:



گام دوم: جای $f(2^-)$، 1^- قرار می‌دهیم:

$$[f(1-f(2^-))]=[f(\underbrace{1-1^-}_{0^+})]=[f(0^+)]$$

گام سوم: $f(0^+)$ یعنی حد راست f وقتی $x \to 0$ که می‌شود 2^-:



گام چهارم: جای $f(0^+)$، 2^- قرار می‌دهیم:

$$[f(0^+)]=[2^-]=1$$

تست و پاسخ ۷

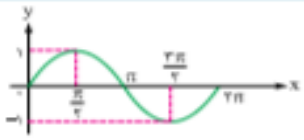
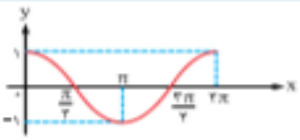
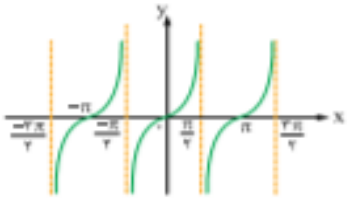
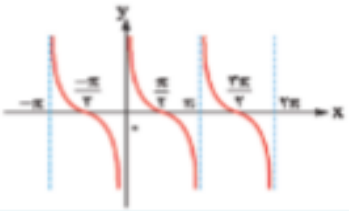
حد عبارت $[2\cos x]+[\tan^2 x]$ وقتی $x \to (\frac{\pi}{3})^+$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

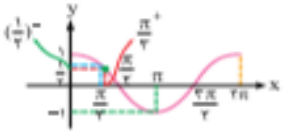
پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره توابع $\cos x$ و $\tan x$ در اطراف $x=\frac{\pi}{3}$ به ترتیب نزولی و صعودی هستند.

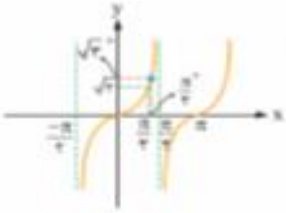
درس‌نامه نمودار توابع مثلثاتی

$y=\sin x$	$y=\cos x$
	
$y=\tan x$	$y=\cot x$
	

پاسخ تشریحی گام اول: می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ است. حالا به کمک نمودار تابع $y=\cos x$ باید بفهمیم وقتی $x \to \frac{\pi}{3}^+$، مقدار این تابع $(\frac{1}{2})^+$ می‌شود یا $(\frac{1}{2})^-$؟



$$0=[2\cos(\frac{\pi}{3})^+] \xrightarrow{\text{براکت}} 2\cos(\frac{\pi}{3})^+=1^- \xrightarrow{\times 2} \cos(\frac{\pi}{3})^+=(\frac{1}{2})^- \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}}$$



گام دوم: می‌دانیم $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ است. حالا به کمک نمودار تابع $y=\tan x$ باید بفهمیم وقتی $x\to\frac{\pi}{3}^+$، مقدار این تابع $(\sqrt{3})^+$ می‌شود یا $(\sqrt{3})^-$؟

$$\xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} \tan(\frac{\pi}{3})^+=\sqrt{3}^+ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \tan^2(\frac{\pi}{3})^+=3^+ \xrightarrow{\text{براکت}} [\tan^2(\frac{\pi}{3})^+]=3$$

گام سوم:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^+}([2\cos x]+[\tan^2 x])=0+3=3$$

تست و پاسخ ۸

اگر $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & [x]\le 0\\ 2x & [x]>0\end{cases}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-} f(\frac{3x-1}{2x+1})$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره دامنهٔ ضابطه‌ها به ترتیب $x<1$ و $x\ge 1$ می‌شود. وقتی $x\to 2^-$، جای x‌ها ۱/۹ را قرار دهید تا معلوم شود $\frac{3x-1}{2x+1}$ می‌شود 1^+ یا 1^-.

درس‌نامه محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$

مرحلهٔ ۱	حد تابع داخلی را وقتی $x\to a$ حساب می‌کنیم. مثلاً L می‌شود (مهم است که L^+ می‌شود یا L^-)
مرحلهٔ ۲	حد تابع بیرونی را وقتی $x\to L^?$ می‌رود حساب می‌کنیم.

درس‌نامه نامعادله‌های ساده براکتی (با شرط $k\in\mathbb{Z}$)

نامعادلهٔ براکتی	جواب	مثال
$[u]>k$	$u\ge k+1$	$[x+2]>4 \Rightarrow x+2\ge 5 \Rightarrow x\ge 3$
$[u]\ge k$	$u\ge k$	$[x+2]\ge 4 \Rightarrow x+2\ge 4 \Rightarrow x\ge 2$
$[u]<k$	$u<k$	$[2x-1]<4 \Rightarrow 2x-1<4 \Rightarrow x<\frac{5}{2}$
$[u]\le k$	$u<k+1$	$[2x-1]\le 4 \Rightarrow 2x-1<5 \Rightarrow x<3$

پاسخ تشریحی **گام اول:** جواب نامعادله‌های $[x]\le 0$ و $[x]>0$ به ترتیب $x<1$ و $x\ge 1$ است.

پس ضابطهٔ f به صورت روبه‌رو می‌شود: $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x<1\\ 2x & x\ge 1\end{cases}$

گام دوم: برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(\frac{3x-1}{2x+1})$ دو مرحله داریم:

اول باید حد $\frac{3x-1}{2x+1}$ وقتی $x\to 2^-$ را به دست آوریم. حدش $\frac{5}{5}=1$ می‌شود ولی مهم این است که 1^+ می‌شود یا 1^-؟ دو کار می‌توانیم انجام دهیم:

۱) جای x، ۱/۹ قرار دهیم:

$$\frac{3(1/9)-1}{2(1/9)+1}=\frac{4/7}{4/8}=1^-$$

۲) تفکیک کسر کنیم. باید جای -1 بنویسیم $1/5-2/5$:

$$\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{3x+1/5-2/5}{2x+1}=\overset{1/5}{\boxed{\frac{3x+1/5}{2x+1}}}-\frac{2/5}{2x+1}=1/5-\frac{2/5}{4^-+1}=1/5-\frac{2/5}{5^-}=1/5-(0/5^+)=1^-$$

پس حد $\frac{3x-1}{2x+1}$ وقتی $x \to 2^-$ برابر با 1^- است: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(\frac{3x-1}{2x+1}) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

گام سوم: حد چپ f در $x=1$ را از ضابطهٔ بالایی (یا دامنهٔ $x<1$) حساب می‌کنیم: $x<1: f(x)=1-x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1-1^2=0$

تست و پاسخ ۹

حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{12}$ ۲) $-\frac{1}{9}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{18}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در حل حدهای $\frac{0}{0}$، معمولاً بهترین روش، قاعدهٔ هوپیتال است.

خودت حل کنی بهتره جای $x\sqrt{x}$ بنویسید $x^{\frac{3}{2}}$.

درس‌نامه قاعدهٔ هوپیتال

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ باشد، به جای محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ می‌توانیم حاصل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را حساب کنیم.

برای حل حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ باید چندتا از فرمول‌ها و قواعد مشتق را بلد باشید:

عبارت	ax^n	$\sqrt{ax+b}$	$\sqrt[3]{ax+b}$	عدد
مشتق	anx^{n-1}	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$\frac{a}{3\sqrt[3]{(ax+b)^2}}$	صفر

جمع و تفریق	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
ضرب	$(fg)'=f'.g+f.g'$
تقسیم	$(\frac{f}{g})'=\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$

مثال ۱:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{5x^2-8x-4}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-1-0}{10x-8-0}=\frac{3(2)^2-2(2)-1}{10(2)-8}=\frac{7}{12}$$

مثال ۲:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2\sqrt{x}-32}{\sqrt[3]{2x}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^{\frac{5}{2}}-32}{\sqrt[3]{2x}-2}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}-0}{\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x)^2}}-0}=\frac{\frac{5}{2}\times 4^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3\sqrt[3]{8^2}}}=\frac{\frac{5}{2}\times 8}{\frac{2}{3\times 4}}=120$$

پاسخ تشریحی راه اول: گام اول: حدمان $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ است. در مخرج کسر، جای $x\sqrt{x}$ می‌نویسیم $x.x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}-1}$$

اگر دوست داشته باشید، می‌توانید $\sqrt[3]{x}$ و $\sqrt{x}$ را هم با توان گویا بنویسید:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-1}$$

گام دوم: هوپیتال می‌زنیم (یعنی از صورت و مخرج جداگانه مشتق می‌گیریم):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^{(\frac{1}{3}-1)}-\frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)}}{\frac{3}{2}x^{(\frac{3}{2}-1)}-0}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}$$

گام سوم، $x=1$ را در حد مرحلهٔ آخر جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{-1}{6}}{\frac{3}{2}}=\frac{-1}{9}$$

درس‌نامه ** حد به روش تغییر متغیر

معمولاً دو مدل تغییر متغیر هستند که به حل ساده‌تر حدها کمک می‌کنند.

۱) وقتی $x\to a$ می‌توانیم تغییر متغیر $t=x-a$ را اعمال کنیم:

مثال:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos(x-\frac{\pi}{6})}{\sin^2(2x-\frac{\pi}{3})}\xrightarrow[(t\to 0)]{(x-\frac{\pi}{6}=t)}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin^2 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{(2\sin t\cos t)^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{4\underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}\cos^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{1-\cos t}^{\,1}}{4\cancel{(1-\cos t)}(1+\cos t)\cos^2 t}=\frac{1}{4\times 2\times 1}=\frac{1}{8}$$

۲) وقتی $x\to a$ می‌توانیم تغییر متغیر $t=\sqrt[6]{x}$ را اعمال کنیم.

مثال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}\xrightarrow[(t\to 1)]{\sqrt[6]{x}=t\Rightarrow x=t^6}\lim_{t\to 1}\frac{t^3-t^2}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2\cancel{(t-1)}}{\cancel{t-1}}=1$$

راه دوم، گام اول، ک.م.م فرجهٔ رادیکال‌ها می‌شود ۶، پس $\sqrt[6]{x}$ را t می‌گیریم: $\sqrt[6]{x}=t\Rightarrow x=t^6$

ضمناً وقتی $x\to 1$، آن‌گاه $\sqrt[6]{x}\to 1$ و در نتیجه $t\to 1$.

گام دوم، حد جدید برحسب t به شکل روبه‌رو می‌شود:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{t^6}-\sqrt{t^6}}{t^6\sqrt{t^6}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-t^3}{t^9-1}$$

گام سوم، عبارت مخرج را ۳ مرتبه با اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2(1-t)}{(t^3-1)(t^6+t^3+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2\overset{-1}{\cancel{(1-t)}}}{\cancel{(t-1)}(t^2+t+1)(t^6+t^3+1)}=\frac{-1}{3\times 3}=\frac{-1}{9}$$

تست و پاسخ ۱۰

اگر $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-[x+1]}{2x-\sqrt{x}-1}=a$ ، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to 2^-}[\frac{x}{a}]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره در حل حدهای $\frac{0}{0}$، معمولاً بهترین روش، قاعدهٔ هوپیتال است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا در $[x+1]$ جای x، 1^- قرار دهید.

پاسخ تشریحی گام اول، وقتی $x\to 1^-$، مقدار عبارت براکتی را به دست می‌آوریم: $[x+1]=[1^-+1]=[2^-]=1$

پس جای عبارت $[x+1]$، عدد ۱ را قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{2x-\sqrt{x}-1}=a$$

گام دوم، حدمان $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ است، پس هوپیتال می‌زنیم:

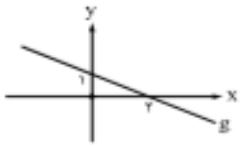
$$a=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{2x-\sqrt{x}-1}\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-0}{2-\frac{1}{2\sqrt{x}}-0}=\frac{2(1)}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$$

گام سوم، با جای‌گذاری $a=\frac{4}{3}$، حد دوم را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^-}[\frac{x}{a}]=\lim_{x\to 2^-}[\frac{x}{\frac{4}{3}}]=\lim_{x\to 2^-}[\frac{3x}{4}]=[\frac{3\times 4^-}{4}]=[\frac{12^-}{4}]=[3^-]=2$$

تست و پاسخ ۱۱

با توجه به نمودار تابع خطی g، حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{g(2x)}{g^{-1}(x)}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره اول ضابطهٔ $g(x)$ را درآورید، بعد ضابطهٔ وارونش. سپس در ضابطهٔ $g(x)$ جای x، $2x$ قرار دهید تا $g(2x)$ هم به دست آید. بعد حاصل حد بدون دردسر به دست می‌آید.

نکته معادلهٔ خط با طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q به صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ است.

پاسخ تشریحی گام اول، در تابع خطی g، طول از مبدأ و عرض از مبدأ را داریم. معادلهٔ آن را می‌نویسیم:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \xrightarrow[q=1]{p=2} \frac{x}{2}+y=1 \Rightarrow y=\frac{-x}{2}+1 \Rightarrow g(x)=\frac{-1}{2}x+1$$

گام دوم، ضابطهٔ وارون تابع خطی $y=-\frac{1}{2}x+1$ را پیدا می‌کنیم:

- اول x را تنها می‌کنیم: $\frac{x}{2}=-y+1 \xrightarrow{\times 2} x=-2y+2$
- جای x و y را عوض می‌کنیم: $y=-2x+2$

پس: $g^{-1}(x)=-2x+2$

تذکر حرفه‌ای‌ترها این‌جا برای به دست آوردن ضابطهٔ وارون، جای عرض از مبدأ و طول از مبدأ را عوض می‌کنند:

وارون: $\frac{x}{q}+\frac{y}{p}=1 \xrightarrow[p=2]{q=1} x+\frac{y}{2}=1 \xrightarrow{\times 2} y=-2x+2$

گام سوم، در ضابطهٔ $g(x)=\frac{-1}{2}x+1$ جای xها، $2x$ قرار می‌دهیم: $g(2x)=\frac{-1}{2}(2x)+1=-x+1$

گام چهارم، حد خواسته‌شده را تشکیل می‌دهیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(2x)}{g^{-1}(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-x+1}{-2x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{-x+1}}{2\cancel{(-x+1)}_1}=\frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۱۲

اگر حاصل $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-ax-b}{x^2-x-2}$ برابر ۳ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۳۲ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۵۶

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تیپ سؤال تا به حال در کنکور ریاضی سال‌های ۹۳ و ۹۸ آمده است و جزء سؤالات پرتکرار در آزمون‌های آزمایشی است. روش حلش روتین است.

خودت حل کنی بهتره حد صورت باید صفر باشد.

درس‌نامه حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ که دو مجهول دارند!

یک سری حد به فرم $\lim\limits_{x\to a}\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}}=\underset{\text{عدد غیر صفر}}{L}$ داریم که در صورت و مخرج دو پارامتر مجهول دارند. این مدل سؤال بارها در کنکور و آزمون‌های آزمایشی آمده است. روش حل این‌گونه است:

گام اول: وقتی $x\to a$، حد صورت یا حد مخرج برابر صفر است. هر کدام که صفر بود، دیگری را خودمان برابر صفر قرار می‌دهیم. این‌جا به یک رابطه بین دو پارامتر می‌رسیم. یکی را برحسب دیگری می‌نویسیم و در حدمان جای‌گذاری می‌کنیم.

گام دوم: حالا حاصل حد را با هر روشی (گویاکردن، هوپیتال و ...) حساب می‌کنیم و برابر با L قرار می‌دهیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** وقتی $x\to -1$، حد مخرج کسر صفر می‌شود، چون حد کل کسر بی‌نهایت نشد (حد برابر ۳ شده)، پس باید حد صورت هم صفر باشد تا بعد از رفع ابهام، حاصل حدمان ۳ شده باشد.

$$\text{حد صورت}=0 \Rightarrow \lim_{x\to -1}(x^3-ax-b)=0 \Rightarrow -1+a-b=0 \Rightarrow b=a-1$$

گام دوم: با جای‌گذاری $b=a-1$، داریم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-ax-\overset{a-1}{b}}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3\overbrace{-ax-a}^{\text{فاکتور از } -a}+1}{x^2-x-2}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\overbrace{(x^3+1)}^{\text{چاق و لاغر}}-a(x+1)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)-a(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)((x^2-x+1)-a)}{(x+1)(x-2)}$$

از صورت و مخرج $(x+1)$ها را می‌زنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-x+1)-a}{x-2}=\frac{1+1+1-a}{-1-2}=\frac{3-a}{-3}$$

گام سوم: حاصل حد باید ۳ می‌شد:

$$\frac{3-a}{-3}=3 \Rightarrow 3-a=-9 \Rightarrow a=12$$

از طرفی:

$$b=a-1=12-1=11$$

گام چهارم:

$$ab=12\times 11=132$$

تست و پاسخ ۱۳

اگر تابع f در $x=2$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2f(x)-4f(x)}{x^2+3x-10}=4$. آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-[x]}{f(x)-[x]}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره در صورت کسر، از $f(x)$ فاکتور بگیرید و جایش L قرار دهید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در صورت کسر، از $f(x)$ فاکتور می‌گیریم و مخرج را با اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2f(x)-4f(x)}{\underset{0}{\underset{\downarrow}{x^2}}+3x-10}=4 \Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)(x^2-4)}{x^2+3x-10}=4 \Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)}=4$$

گام دوم، حد تابع f در $x=2$ را برابر L می‌گیریم:

$$\frac{L(2+2)}{2+5}=4 \Rightarrow \frac{4L}{7}=4 \Rightarrow L=7 \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=L=7$$

گام سوم، برای محاسبهٔ $\lim_{x\to 2^-}\frac{x-[x]}{f(x)-[x]}$ ، اول تکلیف براکت‌ها را معلوم می‌کنیم:

$$[2^-]=1$$

پس جای $[x]$ باید ۱ قرار دهیم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{f(x)-1}$$

گام چهارم، حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{f(x)-1}=\frac{2-1}{\underset{7}{L}-1}=\frac{1}{6}$$

تست و پاسخ ۱۴

اگر $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-a}-a}{x-2}=ab$ ، آن‌گاه b کدام است؟ $(a\,,\,b\in\mathbb{R})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -1

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره این تیپ سؤال تا به حال در کنکور ریاضی سال‌های ۹۳ و ۹۸ آمده است و جز سؤالات پرتکرار در آزمون‌های آزمایشی است. روش حلش روتین است.

خودت حل کنی بهتره حد صورت باید صفر باشد.

درس‌نامه حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ که دو مجهول دارند!

یک سری حد به فرم $\lim_{x\to a}\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}}=\overset{\text{عدد غیرصفر}}{L}$ داریم که در صورت و مخرج دو پارامتر مجهول دارند. این مدل سؤال بارها در کنکور و آزمون‌های آزمایشی آمده است. روش حل این گونه است:

گام اول، وقتی $x\to a$ ، حد صورت یا حد مخرج برابر صفر است. هر کدام که صفر بود، دیگری را خودمان برابر صفر قرار می‌دهیم. این‌جا به یک رابطه بین دو پارامتر می‌رسیم. یکی را برحسب دیگری می‌نویسیم و در حدمان جای‌گذاری می‌کنیم.

گام دوم، حالا حاصل را با هر روشی (گویاکردن، هوپیتال و ...) حساب می‌کنیم و برابر با L قرار می‌دهیم.

پاسخ تشریحی **گام اول**، وقتی $x\to 2$ ، حد مخرج کسر صفر می‌شود، چون حد کل کسر بی‌نهایت نشده (حد برابر ab شده)، پس باید حد در صورت هم صفر باشد تا بعد از رفع ابهام، حاصل حدمان ab شده باشد.

$$\text{حد صورت}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 2}(\sqrt{x-a}-a)=0 \Rightarrow \sqrt{2-a}-a=0 \Rightarrow a=\sqrt{2-a}$$

$$\xrightarrow[(a>0)]{\text{توان ۲}} a^2=2-a \Rightarrow a^2+a-2=0 \Rightarrow (a+2)(a-1)=0 \xrightarrow{a>0} a=1$$

گام دوم، با جای‌گذاری $a=1$ داریم:

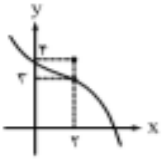
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-a}-a}{x-2}=ab \xrightarrow{a=1} \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=b$$

گام سوم، صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$b=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{x-1}+1}{\underbrace{\sqrt{x-1}+1}_{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)-1}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\overset{1}{\cancel{x-2}}}{2\cancel{(x-2)}}=\frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۱۵

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|3-f(x)|}{2-\sqrt{1+f(x)}}$ کدام است؟



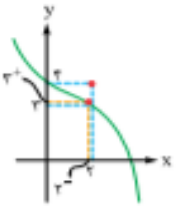
۱) ۴ ۲) -4

۳) ۶ ۴) -6

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره وقتی $x\to 2^-$ مقدار f می شود 3^+، پس $|3-f(x)|$ می‌شود $f(x)-3$.

پاسخ تشریحی گام اول، با توجه به نمودار f وقتی از چپ به $x=2$ نزدیک می‌شویم، مقدار تابع به ۳ نزدیک می‌شود (اگر لازم شد 3^+):



پس جای $|3-\overbrace{f(x)}^{3^+}|$، قرینهٔ عبارت داخل قدرمطلق بیرون می‌آید: $|3-f(x)|=f(x)-3$

گام دوم، حدمان را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|3-f(x)|}{2-\sqrt{1+f(x)}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-3}{2-\sqrt{1+f(x)}}$$

گام سوم، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-3}{2-\sqrt{1+f(x)}}\times\frac{2+\overbrace{\sqrt{1+f(x)}}^{\sqrt{1+3}=2}}{2+\sqrt{1+f(x)}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{4(f(x)-3)}{4-(1+f(x))}=\lim_{x\to 2^-}\frac{4\cancel{(f(x)-3)}^{1}}{\cancel{3-f(x)}_{-1}}=-4$$

تست و پاسخ ۱۶

تابع $f(x)=\begin{cases}(x+1)[x] & -2<x<0\\ ax^2+b & |x+1|\geq 1\end{cases}$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار ab کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤال پیوستگی جزء سؤالات ثابت کنکور است. اغلب با همین تیپ می‌آید، ولی معمولاً محاسبهٔ یک حد صفر صفرم در آن وجود دارد.

خودت حل کنی بهتره جواب نامعادلهٔ $|u|\geq a$ می‌شود $u\geq a$ یا $u\leq -a$.

درس نامه دو نامعادلهٔ قدرمطلقی پراستفاده

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
$\lvert u\rvert\geq a$	$u\geq a$ یا $u\leq -a$	$u\in\mathbb{R}$	$u\in\mathbb{R}$
$\lvert u\rvert\leq a$	$-a\leq u\leq a$	$u=0$	$\varnothing$

درس‌نامه •• پیوستگی

شرط پیوستگی تابع f در $x = a$:

$$\underbrace{\lim_{x\to a^+} f(x)}_{\text{حد راست}} = \underbrace{\lim_{x\to a^-} f(x)}_{\text{حد چپ}} = \underbrace{f(a)}_{\text{مقدار}}$$

پیداکردن مجهول در توابع پیوستهٔ چندضابطه‌ای:

	فرم تابع	برای پیوستگی f در $x = a$ چه می‌کنیم؟	شرط پیوستگی در نقطهٔ مرزی دامنه
۱	$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq a \\ k & x=a \end{cases}$	حد چپ و راست را از g می‌گیریم و مقدارش هم k است.	$\lim_{x\to a} g(x)=k$
۲	$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq a \\ h(x) & x<a \end{cases}$	حد راست و مقدارش را از g و حد چپ را از h می‌گیرد.	$\lim_{x\to a^+} g(x)=g(a)=\lim_{x\to a^-} h(x)$
۳	$f(x)=\begin{cases} g(x) & x>a \\ k & x=a \\ h(x) & x<a \end{cases}$	حد راست را از g و حد چپ را از h می‌گیرد و مقدارش k است.	$\lim_{x\to a^+} g(x)=\lim_{x\to a^-} h(x)=k$
۴	$f(x)=\begin{cases} g(x) & a<x<b \\ h(x) & x\geq b \text{ یا } x\leq a \end{cases}$	در دو نقطهٔ $x=a$ و $x=b$ باید پیوسته باشد.	$\lim_{x\to a^+} g(x)=h(a)=\lim_{x\to a^-} h(x)$ $\lim_{x\to b^-} g(x)=h(b)=\lim_{x\to b^+} h(x)$

پاسخ تشریحی گام اول، نامعادلهٔ $|x+1|\geq 1$ را حل می‌کنیم:

$$|x+1|\geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x+1\geq 1 \Rightarrow x\geq 0 \\ \text{یا} \qquad \text{یا} \\ x+1\leq -1 \Rightarrow x\leq -2 \end{cases}$$

پس ضابطه به صورت مقابل می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} (x+1)[x] & -2<x<0 \\ ax^2+b & x\geq 0 \text{ یا } x\leq -2 \end{cases}$$

گام دوم، نقاط مرزی تابع $x=0$ و $x=-2$ هستند. در این نقاط باید حد راست، حد چپ و مقدار برابر باشند:

- $x=0$: $\underbrace{\text{حد راست}}_{a(0)^2+b} = \underbrace{\text{حد چپ}}_{(0+1)\underbrace{[0^-]}_{-1}} = \underbrace{\text{مقدار}}_{a(0)^2+b} \Rightarrow b=-1$
- $x=-2$: $\underbrace{\text{حد راست}}_{(-2+1)\underbrace{[(-2)^+]}_{-2}} = \underbrace{\text{حد چپ}}_{a(-2)^2+b} = \underbrace{\text{مقدار}}_{a(-2)^2+b} \Rightarrow 2=4a+b \xrightarrow{b=-1} 4a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$

گام سوم:

$$ab=\frac{3}{4}\times(-1)=\frac{-3}{4}$$

تذکر پیوستگی ضابطهٔ اول یعنی $g(x)=(x+1)[x]$ با دامنهٔ $-2<x<0$، به خاطر وجود $[x]$ باید در $x=-1$ بررسی شود. چون $x+1$ در این نقطه صفر می‌شود، پس مشکلی به وجود نمی‌آید. و تابع در $x=-1$ نیز پیوسته است.

تست و پاسخ ۱۷

تابع $f(x)=(x+1)[|x|]$ در بازهٔ $(-2,k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره دقت کنید $|x|$ در $x=0$ مینیمم دارد و $x+1$ در $x=-1$ صفر می‌شود.

نکته ۱) نقاط ناپیوستگی توابع براکتی: $[u]$ نقاط ناپیوستگی = {xهایی که به ازای آن‌ها $u \in \mathbb{Z}$} − {طول min های نسبی u}

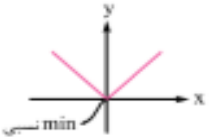
مثال $[x^2]$ نقاط ناپیوستگی در بازهٔ $(-2,2)$ = $\{0,\pm1,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}\} - \{0\} = \{\pm1,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}\}$

x= طول نقطهٔ min سهمی $y=x^2$ است.

۲) اگر $[u]$ در $x=a$ ناپیوسته باشد، تابع $(x-a)[u]$ در $x=a$ پیوسته است.

مثلاً $[x]$ در $x=4$ ناپیوسته است ولی $(x-4)[x]$ در $x=4$ پیوسته است.

پاسخ تشریحی گام اول، نمودار تابع $y=|x|$ به شکل مقابل است:



گام دوم، با توجه به نکتهٔ ۱، نقاط ناپیوستگی $[|x|]$ به صورت زیر هستند:

$[|x|]$ نقاط ناپیوستگی = {xهایی که به ازای آن‌ها $|x| \in \mathbb{Z}$} − {طول نقطهٔ min نسبی $|x|$} = $\mathbb{Z} - \{0\}$

با توجه به بازهٔ $(-2,k)$، طول نقاط ناپیوستگی $[|x|]$ به ترتیب عبارت‌اند از: $-1,1,2,3,\ldots$

گام سوم، عبارت $(x+1)$ که پشت براکت قرار دارد در $x=-1$ صفر می‌شود؛ پس $(x+1)[|x|]$ در $x=-1$ پیوسته می‌شود. در نتیجه نقطهٔ بعدی $x=1$ است. با توجه به این‌که تو بازه باز است، پس حق داریم تا $x=1$ جلو برویم یعنی بازه را $(-2,1)$ انتخاب کنیم تا f در آن پیوسته باشد.

در نتیجه حداکثر مقدار k برابر ۱ است.

یک بار هم طول نقاط کاندید را این‌جوری ببینید:

اولین ناپیوستگی

$-2 \;,\; -1, 0, 1, 2, \ldots$

شروع بازه — ریشهٔ $x+1$

طول min نسبی عبارت داخل براکت

تست و پاسخ ۱۸

نمودار تابع درجه‌دوم f محور xها را در نقاط با طول‌های ۱− و ۵ قطع می‌کند. اگر تابع $g(x)=\begin{cases} 2^{x-1} & x>3 \\ f(x) & x\le 3 \end{cases}$ در $x=3$ پیوسته باشد، خط $x=1$ نمودار تابع g را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۲− ۳) ۴ ۴) ۴−

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ سهمی f به صورت $a(x+1)(x-5)$ است.

نکته اگر x_1 و x_2 صفرهای سهمی f باشند، معادلهٔ آن به صورت $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ است.

پاسخ تشریحی گام اول، $x_1=-1$ و $x_2=5$ صفرهای سهمی f هستند، پس ضابطه‌اش به صورت $f(x)=a(x+1)(x-5)$ است.

ضابطهٔ g به شکل مقابل است:

$$g(x)=\begin{cases} 2^{x-1} & x>3 \\ a(x+1)(x-5) & x\le 3 \end{cases}$$

گام دوم، می‌خواهیم g در $x=3$ پیوسته باشد، پس حد راست، حد چپ و مقدارش در این نقطه باید برابر باشند:

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست}: 2^{3-1}=4 \\ \text{حد چپ و مقدار}: a(3+1)(3-5)=-8a \end{array}\right\} \Rightarrow -8a=4 \Rightarrow a=\frac{-1}{2}$$

پس:

$$g(x)=\begin{cases}2^{x-1} & x>3\\ \frac{-1}{2}(x+1)(x-5) & x\le 3\end{cases}$$

گام سوم، برای به دست آوردن عرض نقطهٔ تقاطع g با خط $x=1$ باید مقدار $g(1)$ را حساب کنیم.

باید سراغ ضابطهٔ پایین برویم:

$$g(1)=-\frac{1}{2}(1+1)(1-5)=4$$

پس عرض نقطهٔ تقاطع، ۴ است.

تست و پاسخ ۱۹

کدام تابع روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $y=[x]\sin\frac{\pi}{2}x$ ۲) $y=[x]\cos\frac{\pi}{2}x$ ۳) $y=[x]\sin\pi x$ ۴) $y=[x]\cos\pi x$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره برای آن‌که $A\times[x]$ همواره پیوسته باشد باید A در نقاط صحیح، صفر شود.

پاسخ تشریحی گام اول، هر ۴ گزینه به صورت $y=\underbrace{[x]}_{\text{ناپیوسته در } \mathbb{Z}}\times\underbrace{g(x)}_{\text{پیوسته}}$ هستند. برای آن‌که تابع ما در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید $g(x)$ در نقاط صحیح برابر صفر باشد تا حاصل‌ضرب $[x]$ و $g(x)$ پیوسته شود.

پس دنبال گزینه‌ای هستیم که در آن $g(x)$ به ازای $x\in\mathbb{Z}$، صفر شود.

گام دوم،

۱) $\sin(\frac{\pi}{2}x)\xrightarrow{x=1}\sin\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow$ صفر نمی‌شود ✗

۲) $\cos(\frac{\pi}{2}x)\xrightarrow{x=2}\cos\pi=-1\Rightarrow$ صفر نمی‌شود ✗

۴) $\cos(\pi x)\xrightarrow{x=1}\cos\pi=-1\Rightarrow$ صفر نمی‌شود ✗

فقط $\sin\pi x$ به ازای xهای صحیح، همواره صفر است.

تست و پاسخ ۲۰

چهارمین نقطهٔ ناپیوستگی تابع $f(x)=[\log_2(2x+1)]$ با طول مثبت کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۸/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵/۵ ۴) ۷/۵

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره اگر u تابعی اکیداً یکنوا باشد، تابع $[u]$ در نقاطی که $u\in\mathbb{Z}$ شود، ناپیوسته است.

نکته $\log_b a=c\xrightarrow{\text{تبدیل به نمایی}}b^c=a$

پاسخ تشریحی گام اول، عبارت داخل براکت یعنی $\log_2(2x+1)$ نقطهٔ min نسبی ندارند، پس باید دنبال xهایی باشیم که مقدار آن را صحیح می‌کند. ضمناً تابع داخل براکت، تابعی اکیداً صعودی است.

گام دوم، به ازای $x=0$، عبارت $\log_2(2x+1)$ می‌شود $\log_2 1=0$، پس برای آن‌که چهارمین نقطهٔ ناپیوستگی با طول مثبت را پیدا کنیم باید حاصل عبارت لگاریتمی برابر ۴ شود:

$$\log_2(2x+1)=4\Rightarrow 2x+1=2^4\Rightarrow 2x=15\Rightarrow x=7/5$$

تست و پاسخ ۲۱

در تابع $f(x)=\begin{cases} ۲^x & x>۲ \\ [\sqrt{x}] & x<۲ \end{cases}$، اختلاف حدهای چپ و راست تابع در $x=۲$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره برای حد راست و چپ به ترتیب $x=۲$ را در ضابطه‌های بالا و پایین قرار دهید.

نکته در توابع به فرم $f(x)=\begin{cases} g(x) & x>a \text{ یا } x\geq a \\ h(x) & x<a \text{ یا } x\leq a \end{cases}$، برای به دست آوردن حدهای راست و چپ در $x=a$ به ترتیب از ضابطه‌های $g(x)$ و $h(x)$ استفاده می‌کنیم.

درس‌نامه بررسی حد $[f(x)]$: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ باشد، در این صورت برای $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ حالات زیر را داریم:

حاصل حد داخل براکت	وضعیت نقطه	حد $[f(x)]$
$L\notin\mathbb{Z}$	هر نقطه‌ای بود!	$[L]$
$L\in\mathbb{Z}$	min نسبی باشد.	L
	فقط max نسبی باشد.	$L-۱$
	min یا max نباشد.	حد ندارد.

پاسخ تشریحی گام اول: حد راست و چپ تابع $f(x)=\begin{cases} ۲^x & x>۲ \\ [\sqrt{x}] & x<۲ \end{cases}$ را در $x=۲$ حساب می‌کنیم:

حد راست $\xrightarrow{\text{ضابطهٔ بالایی}}$ $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} ۲^x=۲^۲=۴$

حد چپ $\xrightarrow{\text{ضابطهٔ پایینی}}$ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\underbrace{\lim\limits_{x\to ۲^-}[\sqrt{x}]=[\sqrt{۲}]=[۱/۴]=۱}$

چون داخل براکت، عدد صحیح نمی‌شود، حد با مقدار برابر است.

گام دوم: اختلاف حدهای چپ و راست برابر است با: $|۴-۱|=۳$

تست و پاسخ ۲۲

حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^+}\dfrac{|x^۳|+[x]-۶}{۲|x|+x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱۲
۲) -۱۲
۳) ۶
۴) -۶

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره اول تکلیف علامت عبارات داخل قدرمطلق و مقدار عددی عبارت براکتی را معلوم کنید.

درس‌نامه روش‌های حل حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

روش حل	چه‌جوری حل می‌کنیم؟	مثال
به کمک تجزیه	باید در صورت و مخرج عامل صفرکنندهٔ $x-a$ را پیدا کنیم.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{4}{-1}=-4$
به کمک تقسیم	عبارتی که راحت تجزیه نمی‌شود را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^3-x^2-4}^{\text{بر } x-2 \text{ تقسیم می‌کنیم}}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{8}{4}=2$
به کمک اتحادهای مثلثاتی	از اتحادهای مثلثاتی $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ و $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ استفاده می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overbrace{\cos^2 x}^{1-\sin^2 x}}{1-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}{\cancel{1-\sin x}}=1+1=2$

نکته

۱	اگر در حدمان عبارت قدرمطلقی داشتیم، باید اول داخل آن را تعیین علامت کنیم. اگر مثبت بود، خودش بیرون می‌آید و اگر منفی بود، قرینه‌اش.
۲	اگر در حدمان عبارت براکتی داشتیم، باید داخل آن را تعیین مقدار کنیم و جایش عدد قرار دهیم.

نکته فرم کلی اتحاد چاق و لاغر به صورت روبه‌رو است: $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا تکلیف قدرمطلق‌ها و براکت‌ها را معلوم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{\overbrace{|x^3|}^{(1)}+\overbrace{[x]}^{(2)}-6}{2\underbrace{[|x|]}_{(3)}+x}\Rightarrow\begin{cases}1)\ |x^3|\xrightarrow[\text{پس قرینه‌اش خارج می‌شود.}]{\text{داخل قدرمطلق منفی است،}}|x^3|=-x^3\\ 2)\ [x]\xrightarrow[\text{می‌شود } -1/99]{\text{تقریباً } (-2)^+}[x]=[-1/99]=-2\\ 3)\ [\underbrace{|x|}_{-x}]=[-x]\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{جای } x \text{، } -1/99}[-x]=[-(-1/99)]=[1/99]=1\end{cases}$$

گام دوم: حدمان این شکلی شد:

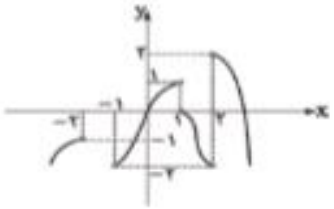
$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{\overbrace{|x^3|}^{-x^3}+\overbrace{[x]}^{-2}-6}{2\underbrace{[|x|]}_{1}+x}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-x^3-2-6}{2(1)+x}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x^3+8)}{x+2}$$

گام سوم: حدمان $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ است. صورت را با اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم و بعد از ساده‌کردن عامل‌های صفرکننده، حاصل حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x^3+8)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{x+2}}=\lim_{x\to(-2)^+}-(x^2-2x+4)=-(4+4+4)=-12$$

تست و پاسخ ۲۳

نمودار تابع f، مطابق شکل داده شده است. اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(-x) = 1-a$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۱

۲) ۱−

۳) ۲−

۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره اگر در سؤالات حد، جای f(x)، تبدیلی از آن مثل f(−x)، f(|x|)، f(ax+b) یا ... بود، آن را به حدی معادل برای f(x) برگردانید.

خودت حل کنی بهتره وقتی $x \to a^+$، آن‌گاه $-x \to (-a)^-$.

درس نامه چندتا میل‌کردن خاص

اگر ...	آن‌گاه ...	
$x \to 0$	$x^2 \to 0^+$	$\lvert x\rvert \to 0^+$
$x \to a$	$(x-a)^2 \to 0^+$	$\lvert x-a\rvert \to 0^+$
$x \to a^+$	$-x \to (-a)^-$	
$x \to a^-$	$-x \to (-a)^+$	

پاسخ تشریحی گام اول، با توجه به جدول بالا، وقتی $x \to a^+$، آن‌گاه $-x \to (-a)^-$، پس:

$$\underbrace{\lim_{x\to a^+} f(-x)}_{\lim\limits_{x\to(-a)^-} f(x)} = 1-a \Rightarrow \lim_{x\to(-a)^-} f(x) = \underbrace{-a+1}_{\text{۱ واحد بیشتر می‌شود.}}$$

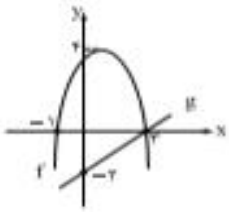
گام دوم، باید دنبال نقطه‌ای باشیم که حد چپ آن، یک واحد از طولش بیشتر است. این اتفاق در $x=-2$ می‌افتد:

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \underbrace{-1}_{-2+1}$$

پس a− همان ۲− است و در نتیجه $a=2$.

تست و پاسخ ۲۴

نمودار تابع درجه‌دوم f و تابع خطی g به شکل زیر هستند. حاصل $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟



۱) ۶−

۲) ۱۲−

۳) $-\frac{3}{2}$

۴) ۴−

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره نوشتن معادلهٔ خط و سهمی در مباحث دیگر هم لازم می‌شوند. نوشتن سریع آن‌ها را بلد باشید. شبیه این سؤال در کنکور تجربی خارج ۱۴۰۰ آمده بود.

خودت حل کنی بهتره میانگین ریشه‌های سهمی، طول نقطهٔ رأس را به ما می‌دهد.

درس‌نامه ۱ نوشتن سریع معادلهٔ سهمی

	چیزهایی که داریم	ضابطهٔ سهمی	نکتهٔ تکمیلی
۱	x_1 و x_2 صفرهای سهمی‌اند.	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۲	نقطهٔ (x_S,y_S) رأس سهمی است.	$y=a(x-x_S)^2+y_S$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۳	سه نقطه از سهمی	$y=ax^2+bx+c$	با حل سه معادله ـ سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.

۲ نوشتن معادلهٔ خط در چند حالت پرکاربرد

۱	معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ (x_0,y_0) با شیب m	$y-y_0=m(x-x_0)$	$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$
۲	معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ h	$y=mx+h$	
۳	معادلهٔ خط با طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q	$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$	

پاسخ تشریحی گام اول، ریشه‌های سهمی f، اعداد ۱− و ۳ هستند، پس ضابطه‌اش به صورت $f(x)=a(x+1)(x-3)$ است.

گام دوم، میانگین ریشه‌های سهمی، طول رأس را به ما می‌دهد: $x_S=\frac{-1+3}{2}=1$

با توجه به شکل، مختصات رأس، $(1,4)$ است. این نقطه را در ضابطهٔ f صدق می‌دهیم: $f(1)=4 \Rightarrow a(2)(-2)=4 \Rightarrow a=-1$

پس ضابطهٔ f به شکل $f(x)=-(x+1)(x-3)$ است.

گام سوم، از تابع خطی g، طول از مبدأ و عرض از مبدأ را داریم. با توجه به سطر سوم جدول درس‌نامه (۲)، داریم:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \xrightarrow[q=-2]{p=3} \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \xrightarrow{\times(-2)} y=\frac{2}{3}x-2 \Rightarrow g(x)=\frac{2}{3}x-2=\frac{2}{3}(x-3)$$

گام چهارم، حد تابع $\frac{f}{g}$ وقتی $x\to 3$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to 3}\frac{-(x+1)\cancel{(x-3)}}{\frac{2}{3}\cancel{(x-3)}}=\frac{-(3+1)}{\frac{2}{3}}=\frac{-4}{\frac{2}{3}}=-6$$

تست و پاسخ ۲۵

نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x^2-1}$ در همسایگی $x=1$ داده شده است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲

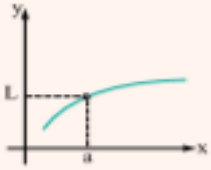
خودت حل کنی بهتره $x=1$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج f است. ضمناً حد f وقتی $x\to 1$ باید ۱ شود.

درس‌نامه •• نقطهٔ توخالی حددار روی نمودار!

اگر نمودار تابع کسری $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ در نقطه‌ای به طول $x=a$، تعریف نشده باشد ولی حد داشته باشد، باید دوتا ویژگی داشته باشد:

۱) $x=a$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج f است: $g(a)=h(a)=0$

۲) حد f در $x=a$ (بعد از رفع ابهام) برابر L است: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$



پاسخ تشریحی گام اول، با توجه به درس‌نامه، تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x^2-1}$ در $x=1$ تعریف نشده، ولی حدی برابر $L=1$ دارد؛ پس:

۱) $\left.\begin{array}{l} x=1 \text{ ریشهٔ صورت است؛} \\ x=1 \text{ ریشهٔ مخرج است که رابطهٔ جدیدی به ما نمی‌دهد!} \end{array}\right\}$ $a(1)+b=0 \Rightarrow b=-a$

۲) با جای‌گذاری $b=-a$، ضابطهٔ f به شکل $f(x)=\frac{ax-a}{x^2-1}$ درمی‌آید. حد این تابع وقتی $x\to 1$ باید $L=1$ شود، پس:

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax-a}{x^2-1}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{a\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=1 \Rightarrow \frac{a}{2}=1 \Rightarrow a=2 \xrightarrow{b=-a} b=-2$$

گام دوم، پس: $a-b=2-(-2)=4$

تست و پاسخ ۲۶

اگر $f(x)=\begin{cases} x+a & x^2<2x \\ bx^2-x-1 & x^2\geq 2x \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤال پیوستگی جزء سؤالات ثابت کنکور است. اغلب با همین تیپ می‌آید ولی معمولاً محاسبهٔ یک حد صفر صفرم در آن وجود دارد.

خودت حل کنی بهتره جواب نامعادلهٔ $x(x-2)<0$ را پیدا کرده و سپس پیوستگی را روی نقاط مرزی چک کنید.

درس‌نامه •• پیوستگی

شرط پیوستگی تابع f در $x=a$:

$$\underbrace{\lim_{x\to a^+} f(x)}_{\text{حد راست}}=\underbrace{\lim_{x\to a^-} f(x)}_{\text{حد چپ}}=\underbrace{f(a)}_{\text{مقدار}}$$

پیداکردن مجهول در توابع پیوسته چندضابطه‌ای:

	فرم تابع	برای پیوستگی f در $x=a$ چه می‌کنیم؟	شرط پیوستگی در نقطهٔ مرزی دامنه
۱	$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq a \\ k & x=a \end{cases}$	حد چپ و راست را از g می‌گیریم و مقدارش هم k است.	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=k$
۲	$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq a \\ h(x) & x<a \end{cases}$	حد راست و مقدارش را از g و حد چپ را از h می‌گیریم.	$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=g(a)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)$

	فرم تابع	برای پیوستگی f در $x=a$ چه می‌کنیم؟	شرط پیوستگی در نقطهٔ مرزی دامنه
۳	$f(x)=\begin{cases} g(x) & x>a \\ k & x=a \\ h(x) & x<a \end{cases}$	حد راست را از g و حد چپ را از h می‌گیریم و مقدارش k است.	$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)=k$
۴	$f(x)=\begin{cases} g(x) & a<x<b \\ h(x) & x\ge b \text{ یا } x\le a \end{cases}$	در دو نقطهٔ $x=a$ و $x=b$ باید پیوسته باشد.	$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=h(a)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)$ $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=h(b)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)$

پاسخ تشریحی گام اول، محدودهٔ یکی از دامنه‌ها را حساب می‌کنیم:

دامنهٔ بالایی: $x^2<2x \Rightarrow x^2-2x<0 \Rightarrow x(x-2)<0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} 0<x<2$

محدودهٔ دومی، متمم محدودهٔ اول است که می‌شود $x\ge 2$ یا $x\le 0$.

پس ضابطهٔ f به شکل مقابل است:

$$f(x)=\begin{cases} x+a & 0<x<2 \\ bx^2-x-1 & x\ge 2 \text{ یا } x\le 0 \end{cases}$$

گام دوم، نقاط مرزی $x=0$ و $x=2$ هستند. باید در این نقاط حد راست، حد چپ و مقدار را با هم برابر قرار دهیم.

$$1)\ x=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{حد راست: } \lim\limits_{x\to 0^+}(x+a)=0+a=a \\ \text{حد چپ: } \lim\limits_{x\to 0^-}(bx^2-x-1)=0-0-1=-1 \\ \text{مقدار: } f(0)=b(0)^2-0-1=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-1$$

$$2)\ x=2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{حد راست: } \lim\limits_{x\to 2^+}(bx^2-x-1)=4b-2-1=4b-3 \\ \text{حد چپ: } \lim\limits_{x\to 2^-}(x+a)=2+\underbrace{a}_{-1}=1 \\ \text{مقدار: } f(2)=b(2)^2-2-1=4b-3 \end{array}\right\} \Rightarrow 4b-3=1 \Rightarrow b=1$$

گام سوم، پس: $b-a=1-(-1)=2$

تست و پاسخ ۲۷

تابع $f(x)=a[x]^3-[x^2]$ در $x=2$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{4}{7}$

۲) $\frac{1}{7}$

۳) $\frac{3}{7}$

۴) $\frac{2}{7}$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره به ازای 2^+، 2^- و ۲، حاصل f را به دست آورید و برابر قرار دهید.

نکته شرط پیوستگی تابع f در $x=a$:

$$\underbrace{\lim_{x\to a^+} f(x)}_{\text{حد راست}}=\underbrace{\lim_{x\to a^-} f(x)}_{\text{حد چپ}}=\underbrace{f(a)}_{\text{مقدار}}$$

پاسخ تشریحی گام اول: حدهای راست، چپ و مقدار تابع $f(x)=a[x]^3-[x^2]$ در $x=2$ را حساب می‌کنیم:

حد راست: $a[2^+]^3-[(2^+)^2]=a(2)^3-[4^+]=8a-4$

حد چپ: $a[2^-]^3-[(2^-)^2]=a(1)^3-[4^-]=a-3$

مقدار: $a[2]^3-[2^2]=8a-4$

گام دوم: سه مقدار بالا باید برابر باشند، پس:

$$8a-4=a-3 \Rightarrow 7a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{7}$$

تست و پاسخ ۲۸

تابع $f(x)=(x^2-ax-b)[\frac{x}{3}]$ در بازهٔ $(0,8)$ پیوسته است. حاصل ab کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱۶۲ ۲) ۸۱ ۳) -81 ۴) -162

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره عبارت داخل براکت، به ازای چه xهایی، عدد صحیح می‌شود؟ عبارت داخل پرانتز در همان نقاط باید صفر شود.

نکته ۱) تابع $y=[ax]$ در تمام نقاطی که $ax\in\mathbb{Z}$ باشد، ناپیوسته است.

۲) فرض کنید $f(x)=\underbrace{g(x)}_{\text{پیوسته}}\times\underbrace{h(x)}_{\text{ناپیوسته}}$ و h در نقاطی به طول x_1، x_2 و ... ناپیوسته باشد. برای آن‌که f در این نقاط پیوسته باشد، باید $g(x_1)=g(x_2)=\cdots=0$ باشد.

پاسخ تشریحی گام اول: نقاط ناپیوستگی $[\frac{x}{3}]$ در بازهٔ $(0,8)$ را پیدا می‌کنیم. به ازای $x=3$ و $x=6$، عبارت داخل براکت، عددی صحیح می‌شود، پس در این نقاط ناپیوسته است.

از طرفی x^2-ax-b یک چندجمله‌ای است و همه‌جا پیوسته است.

گام دوم: برای آن‌که $f(x)=\underbrace{(x^2-ax-b)}_{\text{پیوسته}}\underbrace{[\frac{x}{3}]}_{\text{ناپیوسته}}$ در $x=3$ و $x=6$ پیوسته باشد، باید x^2-ax-b به ازای آن‌ها صفر شود؛ یعنی باید $(x-3)(x-6)$ باشد، پس:

$$(x-3)(x-6)=x^2\underbrace{-9}_{-a}x\underbrace{+18}_{-b} \Rightarrow \begin{cases}a=9\\ b=-18\end{cases}$$

گام سوم: پس:

$$ab=9(-18)=-162$$

تست و پاسخ ۲۹

مجموعه‌جواب‌های نامعادلهٔ $|2x+a|<b$ یک همسایگی چپ ۷ و یک همسایگی راست ۳ است. حاصل $2a-b$ کدام است؟

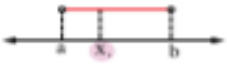
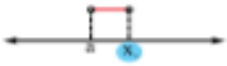
۱) -12 ۲) -16 ۳) -14 ۴) -24

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤالات همسایگی را می‌توان با نامعادله ادغام کرد؛ پس به‌جز بلدبودن تعاریف انواع همسایگی، باید حل نامعادله‌های قدرمطلقی را هم بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره بازهٔ (m,n)، همسایگی راست برای m و چپ برای n است.

درس‌نامه ۰۰ ۱ انواع همسایگی

انواع همسایگی	نمایش روی محور برای x_0	تعریف برحسب x_0	مثال برای $x_0=1$
همسایگی		x_0 باید داخل بازه باشد. $x_0 \in (a,b)$	$(-2,2)$
همسایگی راست		x_0 باید ابتدای بازه باشد. (x_0,b)	$(1,2)$
همسایگی چپ		x_0 باید انتهای بازه باشد. (a,x_0)	$(-1,1)$
همسایگی محذوف		x_0 از داخل بازه حذف می‌شود. $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ یا $(a,b)-\{x_0\}$	$(0,3)-\{1\}$

۲ دو نامعادلهٔ قدرمطلقی پراستفاده

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
$\lvert u\rvert \ge a$	$u\ge a$ یا $u\le -a$	$u\in\mathbb{R}$	$u\in\mathbb{R}$
$\lvert u\rvert \le a$	$-a\le u\le a$	$u=0$	$\varnothing$

پاسخ تشریحی گام اول، بازه‌ای که یک همسایگی چپ ۷ و یک همسایگی راست ۳ باشد به صورت $(3,7)$ است.

گام دوم، نامعادلهٔ $|2x+a|<b$ را با فرض مثبت‌بودن b حل می‌کنیم:

$$|2x+a|<b \Rightarrow -b<2x+a<b \xrightarrow{-a} -b-a<2x<b-a$$

$$\xrightarrow{\div 2} \frac{-b-a}{2}<x<\frac{b-a}{2} \Rightarrow x\in\left(\frac{-b-a}{2},\frac{b-a}{2}\right)$$

گام سوم، بازهٔ به دست آمده در گام‌های اول و دوم باید برابر باشند:

$$\left(\frac{-b-a}{2},\frac{b-a}{2}\right)=(3,7) \Rightarrow \begin{cases} \text{ابتدای بازه‌ها}: \frac{-b-a}{2}=3 \Rightarrow b+a=-6 \\ \text{انتهای بازه‌ها}: \frac{b-a}{2}=7 \Rightarrow b-a=14 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a=-10 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow 2a-b=2(-10)-4=-24$$

تست و پاسخ ۳۰

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^3+ax^2-x-b$ بر $x-1$ و $x+2$ به ترتیب از راست به چپ ۲ و ۳- باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(f(x))$ بر $x+2$ کدام است؟

۱) $-\frac{59}{3}$ ۲) $-\frac{58}{3}$ ۳) $-\frac{52}{3}$ ۴) $-\frac{49}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در کتاب درسی شما فقط باقی‌ماندهٔ تقسیم بر عبارات درجه‌یک پرسیده می‌شود. گاهی برای آن‌که سؤال کمی سخت شود، پای چیزهای دیگر مثل fog هم وسط می‌آید، ولی کل این مبحث فقط یک نکته دارد!

خودت حل‌کنی بهتره باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(f(x))$ بر $x+2$ می‌شود $f(f(-2))$ که در ۲ مرحله باید حسابش کرد.

نکته باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر با $f(\underbrace{\frac{-b}{a}}_{\text{ریشهٔ } ax+b})$ است.

گام اول: برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^3+ax^2-x-b$ بر $x-1$، باید ریشهٔ $x-1$ یعنی $x=1$ را در f قرار دهیم:

$f(1)=1+a-1-b=a-b$

این مقدار باید برابر ۲ باشد: $a-b=2$

گام دوم: برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^3+ax^2-x-b$ بر $x+2$، باید ریشهٔ $x+2$ یعنی $x=-2$ را در f قرار دهیم:

$f(-2)=-8+4a+2-b=4a-b-6$

این مقدار باید برابر ۳- باشد: $4a-b-6=-3 \Rightarrow 4a-b=3$

گام سوم: از حل دو معادلهٔ $a-b=2$ و $4a-b=3$، داریم: $a=\frac{1}{3}, b=\frac{-5}{3}$

پس ضابطهٔ f به شکل $f(x)=x^3+\frac{1}{3}x^2-x+\frac{5}{3}$ است.

گام چهارم: برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(f(x))$ بر $x+2$، باید ریشهٔ $x+2$ یعنی $x=-2$ را در $f(f(x))$ قرار دهیم:

$$\text{باقی‌مانده}=f(\underbrace{f(-2)}_{\text{سوال داده بود که می‌شه ۳-}})=f(-3)=(-3)^3+\frac{1}{3}(-3)^2-(-3)+\frac{5}{3}=-27+3+3+\frac{5}{3}=\frac{-58}{3}$$

تست و پاسخ ۳۱

حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3-\tan^2 x}{\sin 2x-\sin x}$ چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{16}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ جزء سؤالات ثابت کنکورند.

خودت حل کنی بهتره به جای $\tan^2 x$ و $\sin 2x$، عبارت معادلشان را قرار دهید.

درس‌نامه روش‌های حل حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

روش حل	چه‌جوری حل می‌کنیم؟	مثال
به کمک تجزیه	باید در صورت و مخرج عامل صفرکنندهٔ $x-a$ را پیدا کنیم.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{4}{-1}=-4$
به کمک تقسیم	عبارتی که راحت تجزیه نمی‌شود را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^3-x^2-4}^{\text{بر } x-2 \text{ تقسیم می‌کنیم.}}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{8}{4}=2$
به کمک اتحادهای مثلثاتی	از اتحادهای مثلثاتی $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$، $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ و ... استفاده می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overbrace{\cos^2 x}^{1-\sin^2 x}}{1-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}{\cancel{1-\sin x}}=1+1=2$

نکته (۱) $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$

(۲) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

پاسخ تشریحی گام اول، حدمان $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ است.

گام دوم، به کمک نکته‌های (۱) و (۲)، ظاهر حد را عوض می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3-\tan^2 x}{\sin 2x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3-(\frac{1}{\cos^2 x}-1)}{2\sin x\cos x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4-\frac{1}{\cos^2 x}}{\underbrace{2\sin x\cos x-\sin x}_{\text{فاکتور از } \sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{4\cos^2 x-1}{\cos^2 x}}{\sin x(2\cos x-1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\cos^2 x-1}{\cos^2 x\sin x(2\cos x-1)}$$

گام سوم، صورت را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{(2\cos x-1)(2\cos x+1)}{\cos^2 x\sin x(2\cos x-1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x+1}{\cos^2 x\sin x}=\frac{2(\frac{1}{2})+1}{(\frac{1}{2})^2(\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{8}}=\frac{16}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{16}{3}\sqrt{3}$$

جواب حد $\frac{16}{3}$ برابر $\sqrt{3}$ است.

تست و پاسخ ۳۲

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}-2} & x\neq 8\\ a & x=8\end{cases}$ برای $x>0$ تعریف شده است. اگر f پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) 1

۳) -2 ۴) 2

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره باید حد ضابطهٔ بالا را وقتی $x\to 8$ به دست آورید.

درس‌نامه (۱) پیوستگی

شرط پیوستگی تابع f در $x=a$:

$$\underbrace{\lim_{x\to a^+}f(x)}_{\text{حد راست}}=\underbrace{\lim_{x\to a^-}f(x)}_{\text{حد چپ}}=\underbrace{f(a)}_{\text{مقدار}}$$

پیداکردن مجهول در توابع پیوستهٔ چندضابطه‌ای:

	فرم تابع	برای پیوستگی f در $x=a$ چه می‌کنیم؟	شرط پیوستگی در نقطهٔ مرزی دامنه
۱	$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\neq a\\ k & x=a\end{cases}$	حد چپ و راست را از g می‌گیریم و مقدارش هم k است.	$\lim_{x\to a}g(x)=k$
۲	$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq a\\ h(x) & x<a\end{cases}$	حد راست و مقدارش را از g و حد چپ را از h می‌گیریم.	$\lim_{x\to a^+}g(x)=g(a)=\lim_{x\to a^-}h(x)$

	فرم تابع	برای پیوستگی f در $x=a$ چه می‌کنیم؟	شرط پیوستگی در نقطهٔ مرزی دامنه
۳	$f(x)=\begin{cases} g(x) & x>a \\ k & x=a \\ h(x) & x<a \end{cases}$	حد راست را از g و حد چپ را از h می‌گیریم و مقدارش k است.	$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)=k$
۴	$f(x)=\begin{cases} g(x) & a<x<b \\ h(x) & x\geq b \text{ یا } x\leq a \end{cases}$	در دو نقطهٔ $x=a$ و $x=b$ باید پیوسته باشد.	$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=h(a)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)$ $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=h(b)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)$

۲ روش‌های حل حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ رادیکال‌دار

روش حل	چه‌جوری حل می‌کنیم؟	مثال
گویاکردن با اتحاد مزدوج	صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{2x-4}\times\underbrace{\frac{\sqrt{5x-1}+3}{\sqrt{5x-1}+3}}_{6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x-1-9}{6(2x-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{5\cancel{(x-2)}}{12\cancel{(x-2)}}=\frac{5}{12}$
گویاکردن با اتحاد چاق و لاغر	صورت و مخرج را در چاق عبارت رادیکالی ضرب می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x-5}\times\underbrace{\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2}+2\sqrt[3]{x+3}+4}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+2\sqrt[3]{x+3}+4}}_{12}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{\overset{1}{\cancel{x+3-8}}}{12\cancel{(x-5)}}=\frac{1}{12}$
گویاکردن دومرحله‌ای	معمولاً اگر رادیکال زیر رادیکال برود، کارمان ۲مرحله‌ای می‌شود.	$\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}-2}{x-9}\times\underbrace{\frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}+2}{\sqrt{\sqrt{x}+1}+2}}_{4}=\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}+1-4}{4(x-9)}$ $=\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{4(x-9)}\times\underbrace{\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}}_{6}=\lim\limits_{x\to 9}\frac{\overset{1}{\cancel{x-9}}}{24\cancel{(x-9)}}=\frac{1}{24}$

پاسخ تشریحی گام اول، تنها جایی که باید پیوستگی آن را بررسی کنیم، $x=8$ است.

باید حد و مقدار تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}-2} & x\neq 8 \\ a & x=8 \end{cases}$ را در $x=8$ حساب کرده و با هم برابر قرار دهیم.

گام دوم، برای حد از ضابطهٔ بالا استفاده می‌کنیم. در مرحلهٔ اول باید صورت و مخرج را در مزدوج مخرج و چاق صورت ضرب کنیم:

$$\lim_{x\to 8}\frac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}-2}\times\overbrace{\frac{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}+2}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}+2}}^{\text{می‌شود } 2}\times\underbrace{\frac{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}_{\text{می‌شود } 12}=\lim_{x\to 8}\frac{\cancel{4}(8-x)}{\cancel{12}_{3}(\sqrt{x+1}+1-4)}=\lim_{x\to 8}\frac{8-x}{3(\sqrt{x+1}-3)}$$

یک مرحله از گویاکردن مانده است. باید صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم:

$$\lim_{x\to 8}\frac{8-x}{3(\sqrt{x+1}-3)}\times\frac{\overbrace{\sqrt{x+1}+3}^{6}}{\sqrt{x+1}+3}=\lim_{x\to 8}\frac{\overset{2}{\cancel{6}}(8-x)}{\underset{1}{\cancel{3}}(x+1-9)}=\lim_{x\to 8}\frac{-2(x-8)}{x-8}=-2$$

گام سوم: از طرفی مقدار تابع در $x=8$ برابر a است. برای پیوستگی باید حد و مقدار برابر باشند، پس: $\underbrace{a}_{\text{مقدار}}=\underbrace{-2}_{\text{حد}}$

تست و پاسخ ۳۳

نمودار تابع $f(x)=\frac{[x]+[-x]}{x^2+2x+1}$ در همسایگی $x=-1$ شبیه کدام گزینه است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱)

۲)

۳)

۴)

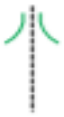
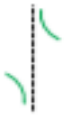
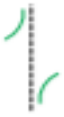
پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره حد عبارت $[x]+[-x]$ در تمام نقاط برابر -1 است.

مشاوره وقتی شکل تابع در همسایگی یک نقطه را می‌خواهند باید سراغ محاسبهٔ حد راست و چپ در آن نقطه برویم.

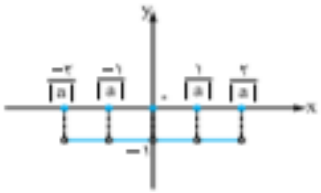
درس‌نامه نمودار حد بی‌نهایت

اگر حد تابع f در همسایگی $x=a$، بی‌نهایت باشد، یکی از ۴ شکل زیر را می‌تواند داشته باشد.

	حد راست	حد چپ	نمودار f در همسایگی $x=a$
۱	$+\infty$	$+\infty$	
۲	$+\infty$	$-\infty$	
۳	$-\infty$	$+\infty$	
۴	$-\infty$	$-\infty$	

نکته ۱ اگر بعد از ساده‌شدن صورت و مخرج، در مخرج $(x-a)^2$ یا ضریبی از آن داشتیم، شکل تابع در همسایگی a، قطعاً شبیه سطر ۱ یا ۴ جدول است.

۲ دربارهٔ $[ax]+[-ax]$ باید چند مورد را بدانیم:

دوضابطه‌ای است.	نمودارش	دورهٔ تناوب	حدش
$[ax]+[-ax]=\begin{cases}0 & ax\in\mathbb{Z}\\ -1 & ax\notin\mathbb{Z}\end{cases}$		$T=\frac{1}{\lvert a\rvert}$	در تمام نقاط ۱− می‌شود.

پاسخ تشریحی گام اول، مخرج را مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{[x]+[-x]}{x^2+2x+1}=\frac{[x]+[-x]}{(x+1)^2}$$

گام دوم، باید حد راست و چپ f در $x=-1$ را حساب کنیم:

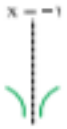
در نکتهٔ (۲) گفتیم که حد $[x]+[-x]$ در هر نقطه‌ای ۱− است؛ پس این‌جا هم هر دو حد چپ و راست ۱− می‌شود.

در نکتهٔ (۱) هم گفتیم اگر مخرج مربع کامل باشد، شکل نمودار شبیه سطر ۱ و ۴ جدول درس‌نامه است.

حد راست: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{[x]+[-x]}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{[x]+[-x]}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

گام سوم، چون حد دو طرف $-\infty$ شد، پس شکل f در همسایگی $x=-1$ شبیه سطر ۴ جدول است.



تست و پاسخ ۳۴

اگر $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ باشد، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x+1))$ کدام است؟

۱) $+\infty$
۲) $-\infty$
۳) صفر
۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره حدهای $f(g(x))$ دومرحله‌ای هستند. در مرحلهٔ اول، حاصل را به صورت حدی بنویسید.

خودت حل کنی بهتره سه مرحله داریم:

$$\overbrace{f(\overbrace{f(\underbrace{x+1}_{(1)})}^{(2)})}^{(3)}$$

درس‌نامه ۰۰ ۱ حد بی‌نهایت

اگر در محاسبهٔ حد یک تابع کسری، حد مخرج صفر و حد صورت عددی غیرصفر باشد، حاصل حدمان $+\infty$ یا $-\infty$ است.

علامت بی‌نهایت با توجه به علامت صفر حدی مخرج و علامت عدد صورت مشخص می‌شود.

	حالت	مثال
۱	$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+1}{x-2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$
۲	$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+x}{x-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$
۳	$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-5}{2-x}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$
۴	$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{1-x}{x^2-25}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$

۲ محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$

مرحلهٔ ۱	حد تابع داخلی را وقتی $x\to a$ حساب می‌کنیم؛ مثلاً L می‌شود (مهم است که L^+ می‌شود یا L^-).
مرحلهٔ ۲	حد تابع بیرونی را وقتی $x\to L^?$ می‌رود حساب می‌کنیم.

۳ حد توابع چندجمله‌ای و گویا در بی‌نهایت

۱) برای محاسبهٔ حد توابع چندجمله‌ای در $\pm\infty$، فقط جمله با درجهٔ بیشتر اهمیت دارد و بقیهٔ جملات را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots)=\lim_{x\to\pm\infty}ax^n \quad \text{(قاعدهٔ پُرتوان)}$$

۲) برای محاسبهٔ حد توابع گویا در $\pm\infty$، از صورت و مخرج، جمله با درجهٔ بیشتر را نگه می‌داریم و بقیهٔ جملات را حذف می‌کنیم. بعد از ساده‌کردن کسر جدید، حاصل حد را حساب می‌کنیم. حد توابع کسری با توجه به درجهٔ صورت و مخرج، سه حالت دارد:

	مقایسهٔ درجهٔ صورت و مخرج	حاصل حد	مثال
۱	درجهٔ صورت > درجهٔ مخرج	$+\infty$ یا $-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}=\frac{x^3-8x^2+1}{x-12x^2}=\frac{x^3}{-12x^2}=\frac{x}{-12}=\frac{+\infty}{-12}=-\infty$
۲	درجهٔ صورت = درجهٔ مخرج	یک عدد غیرصفر	$\lim\limits_{x\to-\infty}=\frac{2x^4-x^2+3x}{3x^4+5x^2+8}=\frac{2x^4}{3x^4}=\frac{2}{3}$
۳	درجهٔ صورت < درجهٔ مخرج	صفر	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+8x^2-7x}{6x^4+10x-9}=\frac{x^3}{6x^4}=\frac{1}{6x}=\frac{1}{+\infty}=0$

پاسخ تشریحی راه اول: محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 0^-}\underbrace{f(\overbrace{f(\underbrace{x+1}_{(1)})}^{(2)})}_{(3)}$، سه مرحله دارد.

گام اول: اگر $x\to 0^-$، آن $x+1\to 1^-$.

پس تا این‌جا داریم:

$$\lim_{x\to 0^-} f(f(x+1)) = \lim_{x\to 1^-} f(f(x))$$

گام دوم، باید حد $f(x)$ وقتی $x \to 1^-$ را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

پس تا این‌جا داریم:

$$\lim_{x\to 0^-} f(f(x+1)) = \lim_{x\to 1^-} f(f(x)) = \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

گام سوم، باید حد f وقتی $x \to -\infty$ را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-1} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty$$

راه دوم، ضابطهٔ $f(f(x+1))$ را تشکیل می‌دهیم و بعد حدش وقتی $x \to 0^-$ را حساب می‌کنیم:

گام اول، اول $f(x+1)$ را می‌سازیم:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \xrightarrow[\text{می‌گذاریم}]{\text{جای x ها، } x+1} f(x+1) = \frac{(x+1)^2}{(x+1)-1} = \frac{(x+1)^2}{x}$$

گام دوم، برای ساخت $f(\underbrace{f(x+1)}_{\text{گام اول}})$، در ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$، جای xها، $\frac{(x+1)^2}{x}$ را قرار می‌دهیم:

$$f(f(x+1)) = f\left(\frac{(x+1)^2}{x}\right) = \frac{\left(\frac{(x+1)^2}{x}\right)^2}{\frac{(x+1)^2}{x} - 1} = \frac{\frac{(x+1)^4}{x^2\,x}}{\frac{(x+1)^2 - x}{\underset{1}{x}}} = \frac{(x+1)^4}{x(x^2+x+1)}$$

گام سوم، حد کسر بالا را وقتی $x \to 0^-$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)^4}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{0^- \times 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

تست و پاسخ ۳۵

حاصل $\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+} \frac{[\tan x]-[\cot x]}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

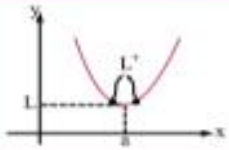
پاسخ: گزینه ۴

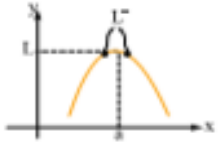
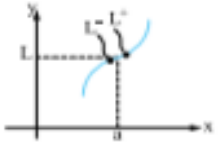
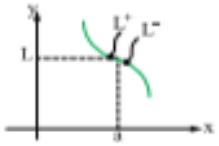
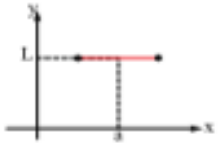
مشاوره در حدهای $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}$ که مخرج عبارت مثلثاتی است، بهتر است از دایرهٔ مثلثاتی کمک بگیرید.

خودت حل کنی بهتره اول تکلیف براکت‌ها را معلوم کنید.

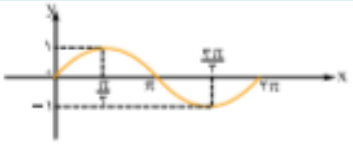
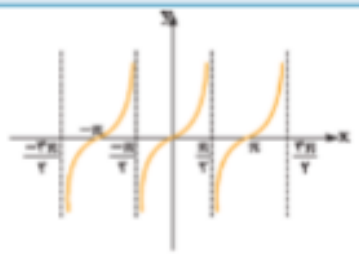
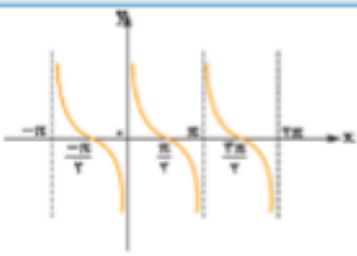
درس‌نامه

۱) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $L \notin \mathbb{Z}$، آن‌گاه $\lim_{x\to a}[f(x)] = [L]$ ولی اگر $L \in \mathbb{Z}$ باشد، برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a}[f(x)]$، می‌توانیم از نمودار $f(x)$ یا جدول زیر کمک بگیریم:

	$x = a$	حد راست $[f]$	حد چپ $[f]$	نمودار
۱	min نسبی باشد.	L	L	

	$x = a$	حد راست $[f]$	حد چپ $[f]$	نمودار
۲	max نسبی باشد.	$L-1$	$L-1$	
۳	در همسایگی‌اش صعودی اکید باشد.	L	$L-1$	
۴	در همسایگی‌اش نزولی اکید باشد.	$L-1$	L	
۵	در همسایگی‌اش ثابت باشد.	L	L	

۲ نمودار توابع مثلثاتی

$y = \sin x$	$y = \cos x$
	
$y = \tan x$	$y = \cot x$
	

نکته اگر در حدمان عبارت براکتی داشتیم، اول باید داخل آن را تعیین مقدار کنیم و جایش عدد قرار دهیم، بعد حاصل حد را حساب کنیم.

پاسخ تشریحی گام اول، باید جای براکت‌ها، عدد مناسب قرار دهیم:

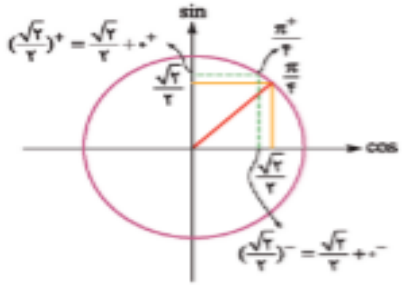
- با توجه به این‌که $\tan x$ صعودی است و $\tan\frac{\pi}{4}=1$، پس وقتی $x \to (\frac{\pi}{4})^+$، آن‌گاه $\tan x \to 1^+$ می‌رود، پس: $[\tan(\frac{\pi}{4})^+]=[1^+]=1$
- با توجه به این‌که $\cot x$ نزولی است و $\cot\frac{\pi}{4}=1$، پس وقتی $x \to (\frac{\pi}{4})^+$، آن‌گاه $\cot x \to 1^-$ می‌رود، پس: $[\cot(\frac{\pi}{4})^+]=[1^-]=0$

تا این‌جا حدمان این شکلی شد:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{\overbrace{[\tan x]}^{1}-\overbrace{[\cot x]}^{0}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{1}{\sin x-\cos x}$$

گام دوم، وقتی $x\to(\frac{\pi}{4})^+$، مخرج کسر بالا صفر می‌شود. الان باید بررسی کنیم 0^+ می‌شود یا 0^-.

از دایرهٔ مثلثاتی کمک می‌گیریم:



گام سوم، پس حدمان این شکلی می‌شود:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{1}{\sin x-\cos x}=\frac{1}{(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}+0^+)-(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}+0^-)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

تست و پاسخ ۳۶

اگر c عددی صحیح باشد و $\lim_{x\to 4}\frac{x+c}{x^2+ax+b}=-\infty$، حداکثر مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره شبیه این سؤال در کنکور ۹۳ و ۹۸ ریاضی آمده است و جزء تیپ سؤالات بسیار معروف است.

خودت حل کنی بهتره مخرج باید ریشهٔ مضاعف ۴ بدهد.

درس‌نامه چند میل‌کردن خاص

اگر $x=a$ نقطهٔ min یا max نسبی تابع باشد (ولی در هیچ همسایگی a ثابت نباشد)، زمانی که $x\to a$ (از هر دو طرف)، مقدار تابع به سمت L می‌رود، ولی این L از هر دو طرف L^+ (اگر min باشد)، یا L^- (اگر max باشد) است. چند نمونه از آن‌ها را در جدول زیر می‌بینید:

اگر ...	آن‌گاه ...	
$x\to 0$	$x^2\to 0^+$	$\lvert x\rvert\to 0^+$
$x\to a$	$(x-a)^2\to 0^+$	$\lvert x-a\rvert\to 0^+$
$\sin x\to 1$	$(1-\sin x)\to 0^+$	
$\cos x\to 1$	$(1-\cos x)\to 0^+$	

نکته اگر $\lim_{x\to k}\frac{\text{عبارت درجه‌دو}}{}=+\infty$ یا $-\infty$، مخرج ضریبی از $(x-k)^2$ است.

پاسخ تشریحی گام اول، با توجه به نکتهٔ بالا، باید مخرج ضریبی از $(x-4)^2$ باشد. چون ضریب x^2 در مخرج یک است، پس مخرج همان $(x-4)^2$ است.

$$\text{مخرج}=(x-4)^2=x^2\underbrace{-8}_{a}x\underbrace{+16}_{b}$$

گام دوم، تا این‌جا حدمان این‌شکلی است:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\overbrace{x+c}^{\text{باید منفی باشد.}}}{\underbrace{(x-4)^2}_{0^+}}=-\infty$$

حد صورت $c+4$ می‌شود که باید منفی باشد، پس: $4+c<0 \Rightarrow c<-4$

چون c عددی صحیح است، حداکثر مقدارش -5 است.

گام سوم: a و b که ثابت‌اند، برای محاسبهٔ حداکثر $a+b+c$، فقط c باید ماکزیمم باشد؛ پس: $\max(a+b+c)=-8+16+(-5)=3$

تست و پاسخ ۳۷

حد تابع $f(x)=\dfrac{ax-\sqrt{x^2+x+b}}{x-3}$ وقتی $x\to-\infty$ برابر ۲ است. اگر حد تابع f در $x=3$ موجود باشد، مقدار آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره وقتی $x\to-\infty$، جای $\sqrt{x^2+x+b}$، عبارت $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ قرار می‌دهیم.

درس‌نامه همارز چندجمله‌ای‌ها در بی‌نهایت

برای محاسبهٔ حد توابع چندجمله‌ای در $\pm\infty$، فقط جمله با درجهٔ بیشتر اهمیت دارد و بقیهٔ جملات را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots)=\lim_{x\to\pm\infty}ax^n \quad \text{(قاعدهٔ پرتوان)}$$

حالا اگر چندجمله‌ای‌ها زیر رادیکال باشند، باید حواستان به «زوج یا فرد بودن فرجه» و «میل کردن x به $+\infty$ یا $-\infty$» باشد. چند مثال ببینید:

مثالی از فرجهٔ ...	عبارت اولیه	همارز در $+\infty$	همارز در $-\infty$
زوج	$\sqrt{4x^2+8x-1}$	$\sqrt{4x^2}=2\|x\|=2x$	$\sqrt{4x^2}=2\|x\|=-2x$
فرد	$\sqrt[3]{8x^3-30x^2+10x}$	$\sqrt[3]{8x^3}=2x$	$\sqrt[3]{8x^3}=2x$

توجه کنید که استفاده از هم‌ارزی‌های فوق در حالتی که عبارت‌ها با هم ساده و حذف شوند جایز نیست.

پاسخ تشریحی گام اول: همارز عبارت رادیکالی در $-\infty$ را می‌نویسیم: $\sqrt{x^2+x+b}\sim\sqrt{x^2}=|x|=-x$

گام دوم: برای محاسبهٔ حد در $-\infty$، از صورت و مخرج، توان‌های بزرگ‌تر x را نگه می‌داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax-\overbrace{\sqrt{x^2+x+b}}^{-x}}{x\underbrace{-3}_{\text{حذف}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a+1)x}{x}=a+1$$

گام سوم: $a+1$ باید ۲ باشد: $a+1=2 \Rightarrow a=1$

گام چهارم: با جای‌گذاری $a=1$، ضابطهٔ f به شکل مقابل درمی‌آید: $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+x+b}}{x-3}$

وقتی $x\to3$، حد مخرج f صفر است؛ پس برای آن‌که f در این نقطه حد داشته باشد، باید حد صورتش هم صفر باشد:

$$\lim_{x\to3}(x-\sqrt{x^2+x+b})=0 \Rightarrow 3-\sqrt{12+b}=0 \Rightarrow b=-3$$

گام پنجم: با جای‌گذاری $b=-3$، حد f را وقتی $x\to3$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to3}\frac{x-\sqrt{x^2+x-3}}{x-3}\times\underbrace{\frac{x+\sqrt{x^2+x-3}}{x+\sqrt{x^2+x-3}}}_{6}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-(x^2+x-3)}{6(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{-(x-3)}{6(x-3)}=\frac{-1}{6}$$

تست و پاسخ ۳۸

توابع $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$ و $g(x)=x-2$ مفروض‌اند. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) صفر ۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در محاسبهٔ حد عبارات رادیکالی در $\pm\infty$، بدانید که کجاها باید هم‌ارزی رادیکالی استفاده کنید.

خودت حل‌کنی بهتره حواستان باشد که جای $|x|$ در $-\infty$ باید $-x$ قرار دهید.

درس‌نامه هم‌ارزی عبارات به فرم $\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}$ در $\pm\infty$

اگر در $\pm\infty$، جای عبارت $\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}$، عبارت $\sqrt[n]{ax^n}=\begin{cases}\sqrt[n]{a}\,x & n \text{ فرد}\\ \sqrt[n]{a}\,|x| & n \text{ زوج}\end{cases}$ را قرار دادیم و این عبارت با عبارتی دیگر، ساده و حذف شد، باید از هم‌ارزی کامل‌تری استفاده کنیم که به شکل زیر است:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}=\begin{cases}\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right) & n \text{ فرد}\\ \sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right| & n \text{ زوج}\end{cases}$$

دو مثال هم ببینید:

۱) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}-x}{3x+1}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی معمولی کافیه.}}\frac{\overbrace{|x|}^{-x}-x}{3x}=\frac{-2x}{3x}=\frac{-2}{3}$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+6x}+x\xrightarrow[\text{پس هم‌ارزی کامل‌تر را می‌نویسیم.}]{\text{در هم‌ارزی معمولی، x جا ساده می‌شن،}}\sqrt[2]{1}\left|x+\frac{6}{2\times1}\right|+x=\underbrace{|x+3|}_{-x-3}+x=-3$

پاسخ تشریحی با جای‌گذاری توابع $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$ و $g(x)=x-2$، حد خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

گام اول:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x-2}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی معمولی}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$$

تست و پاسخ ۳۹

اگر $f(x)=[\frac{3x^2+1}{x^2-1}]$، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره وقتی حد عبارت داخل براکت، $L\in\mathbb{Z}$ می‌شود، مهم است که L^+ است یا L^-.

خودت حل‌کنی بهتره جای $+1$ در صورت، $-3+4$ بنویسید.

پاسخ تشریحی گام اول: عبارت داخل براکت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{3x^2+1}{x^2-1}=\frac{3x^2-3+4}{x^2-1}=\frac{3x^2-3}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-1}=3+\frac{4}{x^2-1}$$

گام دوم، حد f وقتی $x \to +\infty$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[3+\frac{4}{x^2-1}\right] = \left[3+\underbrace{\left(\frac{4}{+\infty}\right)}_{0^+}\right] = [3^+] = 3$$

تست و پاسخ ۴۰

اگر $f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$ و $g(x)=\frac{2x}{x^2+1}$، حاصل $\lim_{x\to-\infty}(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$

۲) $-\sqrt{2}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره اول حد g را وقتی $x \to -\infty$ حساب کنید، فرض کنید حاصلش L می‌شود (مهم است L^+ یا L^-). بعد حد f وقتی $x \to L^+$ یا $-$.

درس نامه محاسبهٔ حد $\lim_{x\to a} f(g(x))$

مرحلهٔ ۱	حد تابع داخلی را وقتی $x \to a$ حساب می‌کنیم؛ مثلاً L می‌شود (مهم است که L^+ می‌شود یا L^-).
مرحلهٔ ۲	حد تابع بیرونی را وقتی $x \to L^?$ می‌رود حساب می‌کنیم.

پاسخ تشریحی گام اول، حد تابع داخلی را یعنی g در $-\infty$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0^-$$

گام دوم، حد داده‌شده را به یک حد جدید تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(g(x)) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

گام سوم، حد f را وقتی $x \to 0^-$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}\times\underbrace{\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}}_{\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{2}\sin x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sqrt{2}\sin x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{\sqrt{2}\sin x}$$

گام چهارم، وقتی $x \to 0^-$، x در ربع ۴ قرار می‌گیرد و sin در این ربع منفی است؛ پس:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{\sqrt{2}\sin x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{\sqrt{2}\sin x} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

تست و پاسخ ۴۱

اگر $a = 2\sqrt{2}-3$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 0^+}\log_{(1+a)} x + \lim_{x\to-\infty}(1-a)^x$ کدام است؟

۱) $+\infty$

۲) $-\infty$

۳) ۱

۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره بلدبودن نمودار توابع نمایی و لگاریتمی به محاسبهٔ حدشان در نقاط خاص کمک می‌کند.

درس‌نامه ۱ حدهای خاص توابع نمایی و لگاریتمی

	$1<a$		$0<a<1$	
نمایی $(y=a^x)$	$a^{-\infty}=0^+$	$a^{+\infty}=+\infty$	$a^{-\infty}=+\infty$	$a^{+\infty}=0^+$
لگاریتمی $(y=\log_a^x)$	$\log_a^{0^+}=-\infty$	$\log_a(+\infty)=+\infty$	$\log_a^{0^+}=+\infty$	$\log_a(+\infty)=-\infty$

۲ وقتی f و g هر دو حدشان ∞ است، حاصل حد $f \overset{+}{\underset{\div}{\times}} g$ چه می‌شود؟

	f	g	$f+g$	$f-g$	$f\times g$	$\frac{f}{g}$
۱	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	مبهم	$+\infty$	مبهم
۲	$+\infty$	$-\infty$	مبهم	$+\infty$	$-\infty$	مبهم
۳	$-\infty$	$+\infty$	مبهم	$-\infty$	$-\infty$	مبهم
۴	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	مبهم	$+\infty$	مبهم

نکته وقتی به بی‌نهایت، عددی اضافه یا کم شود، بی‌نهایت تغییری نمی‌کند: $\pm\infty \pm \text{عدد} = \pm\infty$

پاسخ تشریحی گام اول، مقدار تقریبی a را حساب می‌کنیم: $a=2\sqrt{2}-3\simeq 2(1/4)-3=-0/2$

حاصل هر کدام از حدها را حساب می‌کنیم:

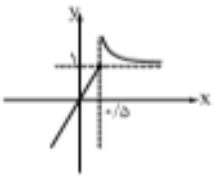
گام دوم: $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{(1+a)}x=\log_{0/8}0^+=+\infty$

گام سوم: $\lim\limits_{x\to -\infty}(1-a)^x=(1/2)^{-\infty}=\frac{1}{(1/2)^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0^+$

گام چهارم، پس: $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{(1+a)}x+\lim\limits_{x\to -\infty}(1-a)^x=(+\infty)+0^+=+\infty$

تست و پاسخ ۴۲

با توجه به نمودار تابع f، حاصل $[\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{f^{-1}(x)}]+\lim\limits_{x\to 1^-}f^{-1}(x)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) $-0/5$

۲) ۱

۳) $0/5$

۴) -1

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره بین $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ و $[\lim\limits_{x\to a}f(x)]$ فرق قائل شوید.

خودت حل کنی بهتره در تابع f وقتی $x\to 0/5^-$، آن‌گاه $y\to 1^-$، پس در f^{-1} ...

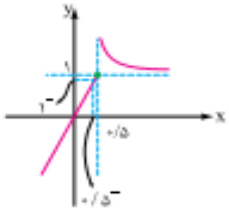
درس‌نامه فرق $\lim_{x\to a}[f(x)]$ و $[\lim_{x\to a} f(x)]$

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آن وقت:

۱	$\lim_{x\to a}[f(x)]$	مهم است که حاصل حد بالا L^+ شده یا L^-؛ هر کدام بود، از آن براکت می‌گیریم.
	مثال	$\lim_{x\to 0}[\cos x]=[1^-]=0$
۲	$[\lim_{x\to a} f(x)]$	خود L مهم است (کاری نداریم L^+ یا L^-). حاصل حد $[L]$ می‌شود.
	مثال	$[\lim_{x\to 0}\cos x]=[1]=1$

نکته اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=L^+$ ، آن‌گاه $\lim_{x\to L^+} f^{-1}(x)=a^+$. واضح است که اگر در حد اول a^+ به a^- تبدیل شود، در حد دوم هم a^+ به a^- تبدیل می‌شود.

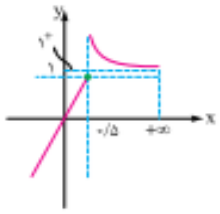
پاسخ تشریحی گام اول، برای محاسبهٔ $\lim_{x\to 1^-} f^{-1}(x)$ ، باید ببینیم در چه نقطه‌ای حد f به سمت 1^- می‌رود؟



این اتفاق در $0/5^-$ رخ می‌دهد، یعنی $\lim_{x\to 0/5^-} f(x)=1^-$. پس:

$$\lim_{x\to 1^-} f^{-1}(x)=0/5^-$$

گام دوم، برای محاسبهٔ $\lim_{x\to 1^+} f^{-1}(x)$ ، باید ببینیم در چه نقطه‌ای حد f به سمت 1^+ می‌رود؟



این اتفاق در $+\infty$ رخ می‌دهد، یعنی $\lim_{x\to +\infty} f(x)=1^+$. پس:

$$\lim_{x\to 1^+} f^{-1}(x)=+\infty$$

گام سوم، از گام دوم استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{f^{-1}(x)}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

گام چهارم، برای حد $[\frac{1}{f^{-1}}]$، مهم این است که حاصل حد داخل براکت صفر شده، پس:

$$[\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{f^{-1}(x)}]=[0]=0$$

گام پنجم،

$$[\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{f^{-1}(x)}]+\lim_{x\to 1^-} f^{-1}(x)=0+(0/5)=0/5$$

تست و پاسخ ۴۳

در یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $5x^2+ax-2b=0$، تابع $f(x)=\frac{2x^2-ax-b}{x+1}$ حد دارد ولی ناپیوسته است. جزء صحیح ریشهٔ دیگر معادلهٔ درجه‌دوم کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) -2 ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره توابع گویا در ریشه‌های مخرجشان، ناپیوسته‌اند.

پاسخ تشریحی گام اول، تنها نقطه‌ای که تابع $f(x)=\frac{2x^2-ax-b}{x+1}$ در آن پیوسته نیست، ریشهٔ مخرج یعنی $x=-1$ است.

پس $x=-1$ ریشهٔ معادلهٔ $5x^2+ax-2b=0$ است:

$$5-a-2b=0 \Rightarrow a+2b=5$$

گام دوم، از طرفی برای آن‌که حد تابع $\frac{2x^2-ax-b}{x+1}$ در $x=-1$ موجود باشد، باید در این نقطه حد صورتش هم صفر باشد:

$$\lim_{x\to -1}(2x^2-ax-b)=0 \Rightarrow 2+a-b=0 \Rightarrow b-a=2$$

گام سوم: از حل دو معادلهٔ $a+2b=5$ و $b-a=2$، داریم: $a=\frac{1}{3}$ و $b=\frac{7}{3}$.

گام چهارم: وقتی یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دومی -1 باشد، ریشهٔ دیگر آن $\frac{-C}{A}$ است. پس ریشهٔ دیگر معادلهٔ $5x^2+ax-2b=0$، برابر است با:

$$x_2=\frac{2b}{5}=\frac{2(\frac{7}{3})}{5}=\frac{14}{15}$$

جزء صحیح $\frac{14}{15}$، صفر می‌شود.

تست و پاسخ ۴۴

تابع $f(x)=\begin{cases}\sin^2\frac{\pi}{2x} & 1<x\le 2\\ \frac{|2x^2-3x-2|}{a(4-x^2)} & 2<x<6\\ b([\frac{-x}{2}]-[\frac{x}{3}]) & x\ge 6\end{cases}$ روی بازهٔ $[2,6]$ پیوسته است. مقدار $8a^2b$ کدام است؟

۱) 13 ۲) -13 ۳) 26 ۴) -26

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره باید در $x=2$ و $x=6$، به ترتیب پیوستگی راست و پیوستگی چپ چک شود.

پاسخ تشریحی برای پیوستگی تابع f روی بازهٔ $[2,6]$ سه شرط باید برقرار باشد. هر شرط را در یک گام بررسی می‌کنیم:

گام اول: در $x=2$ از راست پیوسته باشد، پس:

$$\text{مقدار}=\text{حد راست} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{|2x^2-3x-2|}{a(4-x^2)}=\sin^2\frac{\pi}{4} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{|(x-2)\overbrace{(2x+1)}^{5}|}{a(2-x)\underbrace{(2+x)}_{4}}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4a}\lim_{x\to 2^+}\frac{\overset{1}{\cancel{x-2}}}{\underset{-1}{\cancel{2-x}}}=\frac{2}{16} \Rightarrow \frac{-5}{4a}=\frac{1}{4} \Rightarrow a=-5$$

گام دوم: در بازهٔ $(2,6)$ پیوسته باشد که پیوسته است!

گام سوم: در $x=6$ پیوستگی چپ داشته باشد، پس:

$$\text{مقدار}=\text{حد چپ} \Rightarrow \lim_{x\to 6^-}\frac{|2x^2-3x-2|}{-5(4-x^2)}=b([\frac{-6}{2}]-[\frac{6}{3}])$$

$$\Rightarrow \frac{|72-18-2|}{-5(4-36)}=b(-3-2) \Rightarrow \frac{\overset{12}{\cancel{52}}}{5\times\underset{8}{\cancel{32}}}=-5b \Rightarrow \frac{13}{40}=-5b \Rightarrow b=-\frac{13}{200}$$

گام چهارم:

$$8a^2b=8(-5)^2\times\frac{-13}{200}=200\times\frac{-13}{200}=-13$$

تست و پاسخ ۴۵

اگر $\lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^-}(\frac{b-2ax}{a\cos 2x-\sin x})=-\infty$، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقدار صحیح قابل قبول برای b کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** چون جواب حد، $-\infty$ شده، پس حد مخرج باید صفر باشد:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(a\cos 2x-\sin x)=0 \Rightarrow a\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}=0 \Rightarrow \frac{a}{2}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow a=1$$

گام دوم: با جای‌گذاری $a=1$، حدمان به صورت زیر می‌شود:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}\frac{b-2ax}{a\cos 2x-\sin x}=-\infty \xrightarrow{a=1} \lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}\frac{b-2x}{\cos 2x-\sin x}=-\infty$$

گام سوم: با توجه به این‌که در ربع اول، کسینوس نزولی و سینوس صعودی است، علامت صفر حدی مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$\cos(\frac{\pi}{3})^- - \sin(\frac{\pi}{6})^- = (\frac{1}{2})^+ - (\frac{1}{2})^- = 0^+$$

گام چهارم: برای آن‌که حاصل حدمان $-\infty$ شود، باید صورت عددی منفی باشد:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}^-} \frac{b - 2x}{\cos 2x - \sin x} = \frac{b - \frac{\pi}{3}}{0^+} = -\infty \Rightarrow b - \frac{\pi}{3} < 0 \Rightarrow b - \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\approx 1/05} < 0$$

بزرگ‌ترین عدد صحیح که در شرط $b < 1/05$ صدق می‌کند، $b = 1$ است.

تست و پاسخ ۴۶

حاصل $\lim_{x \to (-2)^-} \frac{(-1)^{[x]}(1 - \cos \pi x)}{2 \sin \pi x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره اول تکلیف $[x]$ را معلوم کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** تکلیف عبارت براکتی را معلوم می‌کنیم:

$$x \to (-2)^- : [x] = [-2/01] = -3$$

پس حدمان به صورت مقابل است:

$$\lim_{x \to (-2)^-} \frac{(-1)^{-3}(1 - \cos \pi x)}{2 \sin \pi x} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{-(1 - \cos \pi x)}{2 \sin \pi x}$$

گام دوم: حدمان $\frac{0}{0}$ است. برای رفع ابهام در صورت از اتحاد $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ و در مخرج از اتحاد $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x \to (-2)^-} \frac{-\cancel{2} \sin^2 \frac{\pi x}{2}}{\cancel{2}(2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2})} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{-\sin \frac{\pi x}{2}}{2 \cos \frac{\pi x}{2}} = \frac{-\sin(-\pi)}{2 \cos(-\pi)} = \frac{0}{-2} = 0$$

تست و پاسخ ۴۷

اگر $f(x)=a+x(x-b)$ و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|f(x)|}{x-1}=0$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+\sqrt{f(x)-x})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $1/5$ ۴) $-1/5$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره وقتی $x\to 1$، حد مخرج $\frac{|f(x)|}{x-1}$ صفر است؛ پس برای آن‌که حدمان صفر شود، باید عبارت درجه‌دومی که در صورت قرار می‌گیرد، عامل $(x-1)^2$ داشته باشد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ضابطهٔ f به صورت مقابل است:

$$f(x)=a+x(x-b)=x^2-bx+a$$

گام دوم: حد داده‌شده به صورت روبه‌رو می‌شود:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|f(x)|}{x-1}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{|x^2-bx+a|}{x-1}=0$$

چون حد مخرج صفر و حاصل کل حد صفر است، پس صورت باید عامل $(x-1)^2$ داشته باشد که بعد ساده‌شدن $(x-1)$ها از صورت و مخرج، یک عامل $x-1$ در صورت بماند و حاصل حد را صفر کند. با توجه به این‌که $|x^2-bx+a|$ باید حاصل $(x-1)^2$ داشته باشد و ضریب x^2، یک است، پس:

$$f(x)=(x-1)^2=x^2-\underset{b}{2}x+\underset{a}{1}$$

گام سوم: حاصل حد داده‌شده را حساب می‌کنیم:

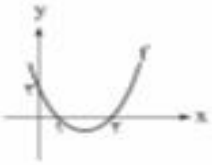
$$\lim_{x\to -\infty}(x+\sqrt{f(x)-x})=\lim_{x\to -\infty}(x+\sqrt{(x-1)^2-x})=\lim_{x\to -\infty}(x+\sqrt{x^2-3x+1})$$

می‌دانیم وقتی $x\to\pm\infty$، هم‌ارزی $\sqrt{x^2+bx+c}\sim|x+\frac{b}{2}|$ را داریم؛ پس:

$$\lim_{x\to -\infty}(x+\underbrace{\sqrt{x^2-3x+1}}_{\sim|x-\frac{3}{2}|})=\lim_{x\to -\infty}(x+\underbrace{|x-\frac{3}{2}|}_{\text{منفی}})=\lim_{x\to -\infty}(x-x+\frac{3}{2})=\frac{3}{2}=1/5$$

تست و پاسخ ۴۸

نمودار تابع درجه‌دوم f رسم شده است. اگر $g(x)=\frac{x}{x-2}$، آن‌گاه حد تابع $(f.g)(x)$ وقتی $x\to 2$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ناموجود

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره از سهمی، ریشه‌هایش را داریم. معادلهٔ سهمی را بنویسید و سپس تابع fg را تشکیل دهید و حدش در $x=2$ را حساب کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ریشه‌های سهمی f را داریم، پس معادله‌اش به صورت زیر است:

$$y=a(x-x_1)(x-x_2)\xrightarrow[x_2=2]{x_1=1} y=a(x-1)(x-2)$$

از طرفی سهمی از نقطهٔ $(0,2)$ می‌گذرد؛ پس:

$$2=a(-1)(-2)\Rightarrow a=1$$

ضابطهٔ سهمی درآمد:

$$f(x)=(x-1)(x-2)$$

گام دوم: تابع fg را تشکیل می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-1)(x-2)\\ g(x)=\frac{x}{x-2}\end{array}\right\}\Rightarrow (f.g)(x)=(x-1)\cancel{(x-2)}.\frac{x}{\cancel{(x-2)}}=x(x-1)\quad (\text{با شرط } x\neq 2)$$

گام سوم: حد fg در $x=2$ برابر است با:

$$\lim_{x\to 2}x(x-1)=2(1)=2$$